آکادمی ۲۰۸۰

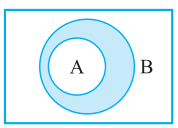
دانش برای همه

09017828232
www.2080.ir
@2080ir
info@2080.ir

پاسخ‌نامهٔ آزمون اختصاصی رشتهٔ ریاضی

ریاضی

۱۰۱- گزینهٔ ۴ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:



۱) $B-A'=A \Rightarrow B\cap(A')'=A$
$\Rightarrow B\cap A=A$ درست است.

۲) $A-B'=A \Rightarrow A\cap(B')'=A$
$\Rightarrow A\cap B=A$ مثل قبلی درست است.

۳) $A\cap B'=A-B=\varnothing$ درست است.

۴) $B\cap A'=B-A$ دلیلی ندارد تهی باشد.

(ناحیهٔ رنگی در نمودار ون)

۱۰۲- گزینهٔ ۴ نکتهٔ اصلی برای پاسخ‌گویی به این سؤال دانستن قانون جذب است، یعنی باید بدانید:

$$\begin{cases}(\bigcirc\cap\triangle)\cup\bigcirc=\bigcirc\\(\bigcirc\cup\triangle)\cap\bigcirc=\bigcirc\end{cases}$$

حالا سؤال را از پرانتز سمت راست ساده می‌کنیم:

$$(B'\cup A)-B=(B'\cup A)\cap B'=B'$$

براساس قانون جذب

حالا پرانتز بزرگ‌تر را ساده می‌کنیم:

$$((B\cap C)'\cap B')=((B'\cup C')\cap B')=B'$$

براساس قانون جذب

و در نهایت:

$$(A-B)\cup B'=(A\cap B')\cup B'=B'$$

۱۰۳- گزینهٔ ۳ می‌دانیم اگر $A\times B=C\times D$ باشد یعنی $A=C$ و $D=B$ و برعکس. بنابراین از رابطهٔ $A\times B=B\times A$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$A=B$$

مجموعهٔ A دارای دو عضو ۱ و ۴ است، بنابراین یکی از دو عدد z و $t-1$ باید ۱ و دیگری ۴ باشد. بنابراین دو حالت داریم:

$$\begin{cases}t-1=4 \Rightarrow t=5\\z=1\end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases}t-1=1 \Rightarrow t=2\\z=4\end{cases}$$

از طرفی مجموعهٔ B دارای دو عضو ۵ و ۷ است، در نتیجه این‌جا نیز دو حالت رخ می‌دهد $\begin{cases}x+2=7 \Rightarrow x=5\\y=5\end{cases}$ یا $\begin{cases}x+2=5 \Rightarrow x=3\\y=7\end{cases}$، بنابراین تعداد مجموعه‌ها به صورت چهارتا است: $\{(x,y),(z,t)\}$

$\{(5,5),(1,5)\}$ $\{(3,7),(4,2)\}$ $\{(3,7),(1,5)\}$
$\{(5,5),(4,2)\}$

۱۰۴- گزینهٔ ۱ می‌دانیم: $p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
از طرفی می‌دانیم: $\bigcirc\Rightarrow\triangle\equiv\sim\bigcirc\vee\triangle$

رابطهٔ داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(q\Rightarrow p)\wedge(p\Rightarrow q)\equiv(p\vee\sim q)\wedge(q\vee\sim p)$$

حالا از ویژگی پخشی استفاده می‌کنیم:

$$((p\vee\sim q)\wedge q)\vee((p\vee\sim q)\wedge\sim p)$$
$$\equiv((p\wedge q)\vee(\sim q\wedge q))\vee((p\wedge\sim p)\vee(\sim q\wedge\sim p))$$
$$\equiv((p\wedge q)\vee F)\vee(F\vee(\sim q\wedge\sim p))$$
$$\equiv(p\wedge q)\vee(\sim q\wedge\sim p)\equiv(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$$

اگر بخواهیم از جدول استفاده کنیم، داریم:

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
د	د	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	د	د

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲) $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$	۱) $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$
د	د
د	ن
د	ن
د	د
۴) $(p\vee q)\wedge\sim(p\wedge q)$	۳) $(p\wedge q)\wedge\sim(p\vee q)$
ن	ن
د	ن
د	ن
ن	ن

همان‌طور که می‌بینیم ارزش $p\Leftrightarrow q$ با ارزش گزارهٔ داده‌شده در ۱) یعنی $(p\wedge q)\vee\sim(p\vee q)$ برابر است.

۱۰۵- گزینهٔ ۳ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $x-1$ برابر ۸ است، پس:

$$P(1)=8 \quad (*)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $2x+1$ برابر ۵ است، پس:

$$P(-\frac{1}{2})=5 \quad (**)$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

حالا فرض کنیم باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$ برابر $ax+b$ باشد، در این صورت با توجه به رابطهٔ تقسیم داریم:

$$P(x)=(۲x^۲-x-۱)Q(x)+ax+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(۱)=۰+a+b \xrightarrow{(*)} ۸=a+b \\ P(-\frac{۱}{۲})=۰+(-\frac{۱}{۲}a+b) \xrightarrow{(**)} ۵=-\frac{۱}{۲}a+b \end{cases}$$

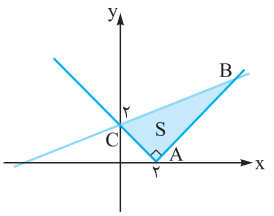
$$\xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳=\frac{۳}{۲}a \Rightarrow a=۲ \xrightarrow{۸=a+b} b=۶$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $۲x^۲-x-۱$ برابر $۲x+۶$ است.

۱۰۶- گزینهٔ ۴ اول تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}$ را ساده می‌کنیم:

$$y=\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|$$

حالا دو نمودار $y=|x-۲|$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل باید مساحت مثلث ABC را محاسبه کنیم.

طول AC برابر $۲\sqrt{۲}$ است. برای محاسبهٔ طول AB باید مختصات نقطهٔ B را محاسبه کنیم. پس دو تابع را تلاقی می‌دهیم:

$$|x-۲|=\frac{۱}{۲}x+۲ \xrightarrow{x_B>۲} x-۲=\frac{۱}{۲}x+۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}x=۴ \Rightarrow x_B=۸ \xrightarrow{y=|x-۲|} y_B=۶$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(۸,۶) \\ A(۲,۰) \end{cases} \Rightarrow AB=\sqrt{(۸-۲)^۲+(۶-۰)^۲}=۶\sqrt{۲}$$

در نتیجه: $S_{ABC}=\frac{AB\times AC}{۲}=\frac{۶\sqrt{۲}\times ۲\sqrt{۲}}{۲}=۱۲$

۱۰۷- گزینهٔ ۱ ابتدا $f^{-۱}(۲۰)$ را می‌یابیم. برای این کار معادلهٔ $f(x)=۲۰$ را حل می‌کنیم:

$$x+\sqrt{x}=۲۰ \Rightarrow x=۱۶ \Rightarrow f^{-۱}(۲۰)=۱۶$$

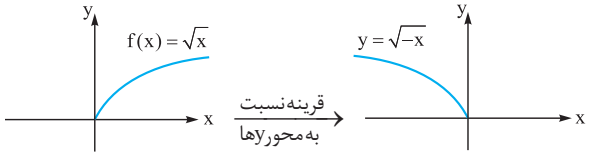
بنابراین: $g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=g^{-۱}(۱۶)$

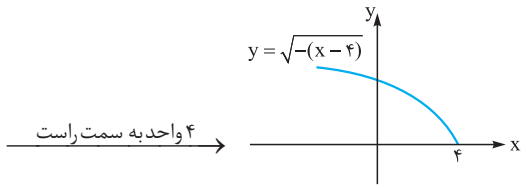
حالا برای محاسبهٔ $g^{-۱}(۱۶)$ باید معادلهٔ $g(x)=۱۶$ را حل کنیم:

$$\frac{۹x+۶}{۱-x}=۱۶ \Rightarrow ۹x+۶=۱۶-۱۶x$$

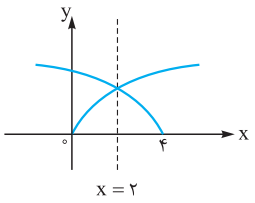
$$\Rightarrow ۲۵x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۲۵}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow g^{-۱}(f^{-۱}(۲۰))=\frac{۲}{۵}$$

۱۰۸- گزینهٔ ۳ اول نمودار انتقال‌یافته را رسم می‌کنیم:





حالا نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ و انتقال‌یافتهٔ آن را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل، دو نمودار نسبت به خط $x=۲$ متقارن هستند.

۱۰۹- گزینهٔ ۴

روش ۱

$$\sin C=\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow AC=\frac{۱۳}{۵}AH \quad (*)$$

حالا برای محاسبهٔ طول AH در مثلث AHC از قضیهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$AH^۲+CH^۲=AC^۲ \xrightarrow{(*)} AH^۲+۹^۲=(\frac{۱۳}{۵}AH)^۲$$

$$\Rightarrow AH^۲+۸۱=\frac{۱۶۹}{۲۵}AH^۲ \Rightarrow ۸۱=\frac{۱۶۹}{۲۵}AH^۲-AH^۲$$

$$\Rightarrow ۸۱=\frac{۱۴۴}{۲۵}AH^۲ \Rightarrow AH^۲=\frac{۸۱\times ۲۵}{۱۴۴}$$

$$\Rightarrow AH=\frac{۹\times ۵}{۱۲}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

روش ۲

$$\sin C=\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\sin^۲C+\cos^۲C=۱} \cos C=\frac{۱۲}{۱۳}=\frac{CH}{AC}$$

$$\xrightarrow{CH=۹} AC=\frac{۳۹}{۴}$$

$$\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{۵}{۱۳} \Rightarrow AH=\frac{۳۹}{۴}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱۵}{۴}=۳/۷۵$$

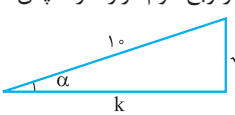
۱۱۰- گزینهٔ ۳ اول خواستهٔ مسئله را ساده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha)=\cos(۳\pi-\frac{\pi}{۴}+\alpha)=-\cos(\alpha-\frac{\pi}{۴})$$

$$=-(\cos\alpha\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{۴})$$

$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(\cos\alpha+\sin\alpha) \quad (*)$$

برای محاسبهٔ مقدار خواسته‌شده باید مقدار $\cos\alpha$ را محاسبه کنیم. از آن‌جا که $\sin\alpha=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}$ و α در ربع دوم قرار دارد، پس:



$$\Rightarrow k^۲=۹۸ \Rightarrow k=\sqrt{۹۸}$$

(α در ربع دوم)

$$\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{\sqrt{۹۸}}{۱۰}=-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}$$

بنابراین با توجه به (*):

$$\cos(\frac{۱۱\pi}{۴}+\alpha)=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-\frac{۷\sqrt{۲}}{۱۰}+\frac{\sqrt{۲}}{۱۰})$$

$$=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}(-\frac{۶\sqrt{۲}}{۱۰})=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۱۱- گزینهٔ ۲

$$\tan 3x \tan x = 1 \Rightarrow \tan 3x = \frac{1}{\tan x}$$
$$\Rightarrow \tan 3x = \cot x$$

حالا جای $\cot x$ از $\tan(\frac{\pi}{2} - x)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$$

جواب معادلهٔ $\tan x = \tan A$ به صورت $x = k\pi + A$ است، پس:

$$\tan 3x = \tan(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x$$
$$\Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$$

حالا جواب‌ها را در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ می‌یابیم:

$$\begin{cases} k = 4 : x = \frac{9\pi}{8} \\ k = 5 : x = \frac{11\pi}{8} \\ k = 6 : x = \frac{13\pi}{8} \\ k = 7 : x = \frac{15\pi}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} = \frac{9\pi}{8} + \frac{11\pi}{8} + \frac{13\pi}{8} + \frac{15\pi}{8} = 6\pi$$

۱۱۲- گزینهٔ ۳

راه اول بدون در نظر گرفتن پرانتزها با دنبالهٔ اعداد طبیعی سروکار داریم $(a_n = n)$ که یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت یک $(d = 1)$ هستند. در دستهٔ بیستم هم که بیست‌تا جمله داریم. فقط تنها مجهول برای محاسبهٔ مجموع جملات دستهٔ بیستم، جملهٔ اول این دسته است. برای محاسبهٔ جملهٔ اول دستهٔ بیستم به سراغ جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم می‌رویم و ابتدا آن را محاسبه می‌کنیم. برای این کار باید ببینیم تا جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم چندتا عدد می‌بینیم:

$$(1),(2,3),(4,5,6),\ldots,(\quad)$$
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$
$$\text{تعداد اعداد} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 19 \Rightarrow$$

$$\text{تعداد کل اعداد تا جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{19(20)}{2} = 190$$

پس جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم جملهٔ ۱۹۰ام دنباله، بدون در نظرگرفتن پرانتزهاست. چون جملهٔ عمومی این دنباله $a_n = n$ است، پس جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم برابر $a_{190} = 190$ است. در نتیجه جملهٔ اول دستهٔ بیستم برابر ۱۹۱ است. بنابراین مجموع جملات دستهٔ بیستم برابر است با:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(191) + 19(1)] = 10(401) = 4010$$

می‌توانیم از فرمول $S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$ استفاده کنیم. این‌طوری جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم برابر ۱۹۰ است. پس جملهٔ اول دستهٔ بیستم ۱۹۱ و جملهٔ آخر آن ۲۱۰ است. در نتیجه:

$$S_{20} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{20}{2}[191 + 210] = 4010$$

راه دوم به جملات آخر دسته‌ها نگاه کنید. *یاد پی میفتین؟!* جملات آخر دسته‌ها به صورت زیر قابل بیان هستند:

دستهٔ اول: $1 = \binom{2}{2}$ ، دستهٔ دوم: $3 = \binom{3}{2}$

دستهٔ سوم: $6 = \binom{4}{2}$ ، دستهٔ چهارم: $10 = \binom{5}{2}$

پس جملهٔ آخر دستهٔ نوزدهم $\binom{20}{2}$ یا برابر $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ است.

در نتیجه:

$$S_{20} = \frac{20}{2}(191 + 210) = 4010$$

۱۱۳- گزینهٔ ۱

چون عنصر مورد نظر بعد از هر ۳۰ روز، $\frac{1}{10}$ جرم خود را از دست می‌دهد، پس ۰/۹ آن باقی می‌ماند. در نتیجه:

بعد از $(30n)$ روز	...	بعد از $(30\times2=60)$ روز	بعد از ۳۰ روز	مقدار اولیه
$(0/9)^n 24$		$(0/9)^2 24$	$0/9(24)$	۲۴

می‌خواهیم بعد از گذشت $(30n)$ روز ۸ گرم از عنصر باقی بماند، پس:

$$(0/9)^n 24 = 8 \Rightarrow (0/9)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$n \log \frac{9}{10} = \log \frac{1}{3} \Rightarrow n(\log 9 - \log 10) = -\log 3$$
$$\Rightarrow n(2\log 3 - 1) = -\log 3$$
$$\xrightarrow{\log 3 = 0/48} n(2(0/48) - 1) = -0/48$$
$$\Rightarrow n(-0/04) = -0/48 \Rightarrow n = \frac{0/48}{0/04} = 12$$

پس بعد از گذشت (30×12) روز یا به عبارت دیگر ۳۶۰ روز این اتفاق می‌افتد.

۱۱۴- گزینهٔ ۱

(این سؤال خارج از سطح کتاب درسی است.)

وقتی توان یک عبارت به ∞ میل کند با توجه به این‌که $n \to \infty$، هر عبارت با جمله‌ای که پایهٔ آن بزرگ‌تر باشد، هم‌ارز خواهد بود.

(دقت کنید که پایهٔ 2^{1-2n} برابر $\frac{1}{4} = 2^{-2}$ است.)

صورت: $2^{2n+1} - 2^{1-2n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2^{2n+1}$

مخرج: $2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2^{2n+1}$

بنابراین:

$$\text{حاصل حد} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{2^{2n+1}} = 1$$

۱۱۵- گزینهٔ ۲

ابهام حد از نوع $\frac{0}{0}$ است. پس از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \lim_{x\to1} \frac{2 - 7\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{7}{2}}{2 - \frac{3}{4}}$$
$$= \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -\frac{12}{10} = -1/2$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۱۶- گزینهٔ ۱ اول شرط‌های ضابطهٔ $f(x)$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$|x-1|<1 \Rightarrow -1<x-1<1 \Rightarrow 0<x<2$$

$$|x-1|>1 \Rightarrow \begin{cases} x-1\geq 1 \Rightarrow x\geq 2 \\ \text{یا} \\ x-1\leq 1 \Rightarrow x\leq 0 \end{cases}$$

داریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)[x] & 0<x<2 \\ x^2+ax+b & x\geq 2 \text{ یا } x\leq 0\end{cases}$$

پس باید پیوستگی را در دو نقطهٔ مرزی $x=0$ و $x=2$ بررسی کنیم.

برای پیوستگی در $x=0$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+ax+b)=b=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-1)[x]=0\end{cases} \Rightarrow b=0$$

برای پیوستگی در $x=2$:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)[x]=(2-1)(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2+ax+b)=4+2a+b=f(2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4+2a+b=1 \xrightarrow{b=0} 2a=-3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۱۱۷- گزینهٔ ۱ خط $y=-1$ مجانب افقی تابع است، پس:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{ax^2}=-1 \Rightarrow \frac{-2}{a}=-1$$

$$\Rightarrow a=2$$

خطوط $x=-2$ و $x=1$ مجانب‌های قائم تابع هستند، پس ریشه‌های مخرج تابع‌اند.

مخرج: $ax^2+bx+c=0 \xrightarrow{a=2} 2x^2+bx+c=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1: 2+b+c=0 \\ x=-2: 8-2b+c=0\end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} -6+3b=0$$

$$\Rightarrow b=2, c=-4$$

بنابراین: $f(x)=\dfrac{-2x^2+3x}{2x^2+2x-4} \Rightarrow f(-1)=\dfrac{-5}{-4}=1/25$

۱۱۸- گزینهٔ ۲ اول از تابع g مشتق می‌گیریم:

$$g(x)=f(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{2\sqrt{1+\tan^2 x}} f'(\sqrt{1+\tan^2 x})$$

$$\xrightarrow{x=\frac{\pi}{3}} g'(\frac{\pi}{3})=\frac{2\sqrt{3}(1+(\sqrt{3})^2)}{2\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} f'(\sqrt{1+(\sqrt{3})^2})$$

$$\xrightarrow{g'(\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}(4)}{2(2)} f'(2) \Rightarrow f'(2)=\frac{1}{4}$$

۱۱۹- گزینهٔ ۴

$$\text{آهنگ متوسط در بازهٔ } [5,6]=\frac{f(6)-f(5)}{6-5}=\frac{3-4}{1}=-1$$

آهنگ متوسط تابع در بازهٔ $[5,6]$ با آهنگ لحظه‌ای آن در $x=k$ برابر است، پس: $f'(k)=-1$

$$f(x)=\sqrt{21-x^2+4x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-2x+4}{2\sqrt{21-x^2+4x}}$$

$$\Rightarrow f'(k)=\frac{-2k+4}{2\sqrt{21-k^2+4k}}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{-2(k-2)}{2\sqrt{21-k^2+4k}}=-1 \Rightarrow \sqrt{21-k^2+4k}=k-2$$

$$\xrightarrow[k-2\geq 0]{\text{به توان ۲}} 21-k^2+4k=k^2-4k+4$$

$$\Rightarrow 2k^2-8k-17=0$$

$$\Rightarrow k=\frac{8\pm\sqrt{64+8(17)}}{4}=\frac{8\pm\sqrt{200}}{4}=\frac{8\pm 10\sqrt{2}}{4}$$

$$=2\pm\frac{5\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{k-2\geq 0} k=2+5\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۲۰- گزینهٔ ۳ مختصات نقطهٔ تماس:

$$x=4: f(4)=\frac{16}{2}=8 \Rightarrow A(4,8)$$

شیب خط مماس:

$$f(x)=\frac{5x-4}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{5(\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(5x-4)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$\Rightarrow f'(4)=\frac{10-\frac{1}{4}(16)}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

پس معادلهٔ خط مماس برابر است با: $y-8=\dfrac{3}{2}(x-4)$

حالا برای این‌که ببینیم خط مماس محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند، $x=0$ قرار می‌دهیم:

$$y-8=\frac{3}{2}(0-4) \Rightarrow y-8=-6 \Rightarrow y=2$$

۱۲۱- گزینهٔ ۴ $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادلهٔ $2x^2+3x-1=0$ هستند، پس:

$$S=\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{3}{2}$$

$$P=\tan\alpha.\tan\beta=\frac{c}{a}=-\frac{1}{2}$$

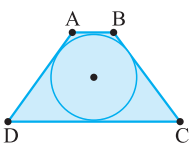
حالا مقدار $\tan(\alpha+\beta)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}=-1$$

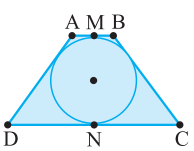
۱۲۲- گزینهٔ ۱

چندنکته

۱) در یک ذوزنقهٔ محیطی و متساوی‌الساقین، قطر دایرهٔ محاطی، واسطهٔ هندسی بین دو قاعده است؛ یعنی در شکل مقابل داریم: $AB\times CD=(2R)^2$

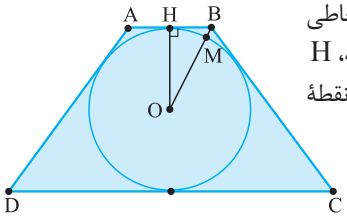


۲) اگر ذوزنقه‌ای متساوی‌الساقین و محیطی باشد، نقاط تماس دایرهٔ محاطی آن با دو قاعده، وسط هر یک از قاعده‌ها است. $AM=MB$ $CN=DN$



www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

اگر نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی با قاعدهٔ کوچک‌تر ذوزنقه، H باشد، آن‌گاه بنابر نکتهٔ ۲، نقطهٔ H وسط AB است و $HB = \frac{۹}{۲}$.



چون شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است، پس مثلث OBH در رأس H قائمه است.

از طرفی اگر شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه R باشد چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است، بنا بر نکتهٔ (۱) داریم:

$$AB \times CD = (۲R)^۲ \Rightarrow ۹ \times ۱۶ = ۴R^۲ \Rightarrow R = ۶$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH داریم:

$$OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ = ۶^۲ + (\frac{۹}{۲})^۲ = \frac{۲۲۵}{۴} \Rightarrow OB = \frac{۱۵}{۲}$$

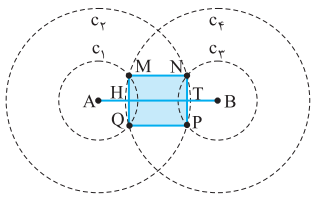
با توجه به شکل، نزدیک‌ترین نقطهٔ دایره تا رأس B، نقطهٔ M است و داریم:

$$MB = OB - OM = OB - R = \frac{۱۵}{۲} - ۶ = \frac{۳}{۲}$$

۱۲۳- گزینهٔ ۳

نکته

خط‌المرکزین دو دایرهٔ متقاطع، عمودمنصف وتر مشترک آن دو دایره است.



MQ وتر مشترک دو دایرهٔ $c_۱$ و $c_۴$ است، پس MQ بر AB عمود می‌باشد. به همین دلیل NP نیز بر AB عمود است و در نتیجه $MQ \parallel NP$.

چون دایره‌های کوچک با هم و دایره‌های بزرگ نیز با هم برابرند، پس وتر مشترک‌های آن‌ها برابرند، در نتیجه $MQ = NP$.

در چهارضلعی MNPQ دو ضلع مقابل، موازی و مساوی هستند، پس متوازی‌الاضلاع است.

چون AB عمودمنصف وتر مشترک‌های MQ و NP است، پس $MH = NT$ و چهارضلعی MNTH متوازی‌الاضلاع است، پس MN با HT و در نتیجه با AB موازی است. از طرفی MQ بر AB عمود است، پس MQ نیز بر MN عمود است و در نتیجه یک زاویهٔ متوازی‌الاضلاع MNPQ قائمه است، پس این چهارضلعی مستطیل نیز می‌باشد.

تذکر در این تست گزینه‌های ۲ و ۳ هر دو درست هستند، هر چند منظور طراح محترم ۳ بوده است.

۱۲۴- گزینهٔ ۱

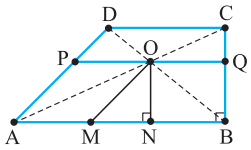
نکته

اگر از نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای، پاره‌خطی موازی با دو قاعده رسم کنیم، تا دو ساق آن را قطع کند، آن‌گاه نقطهٔ برخورد قطرها، وسط آن پاره‌خط است.

از نقطهٔ O (محل برخورد قطرها) خطی موازی با دو قاعده رسم می‌کنیم تا ساق‌ها را در نقاط P و Q قطع کند، بنا بر نکتهٔ بالا:

$$OP = OQ \quad (۱)$$

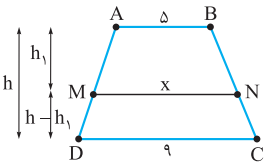
چهارضلعی MOPA متوازی‌الاضلاع است، پس: $OP = AM$ (۲)



چهارضلعی OQBH مستطیل است، پس: $OQ = NB$ (۳)

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود $AM = NB$ و بنابراین $\frac{AM}{NB} = ۱$.

۱۲۵- گزینهٔ ۲ اگر ارتفاع ذوزنقهٔ اولیه h و ارتفاع ذوزنقهٔ بالایی $h_۱$ باشد، آن‌گاه ارتفاع ذوزنقهٔ پایینی $h - h_۱$ است.



$$S_{ABNM} = \frac{x+۵}{۲} \cdot h_۱$$

$$S_{MNCD} = \frac{x+۹}{۲} \cdot (h - h_۱)$$

بنا به فرض $S_{ABNM} = S_{MNCD}$، در نتیجه داریم:

$$\frac{x+۵}{۲} \cdot h_۱ = \frac{x+۹}{۲}(h - h_۱) \Rightarrow \frac{h - h_۱}{h_۱} = \frac{x+۵}{x+۹}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_۱} - \frac{h_۱}{h_۱} = \frac{x+۵}{x+۹} \Rightarrow \frac{h}{h_۱} - ۱ = \frac{x+۵}{x+۹}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{x+۵}{x+۹} + ۱ = \frac{۲x+۱۴}{x+۹} \quad (۱)$$

از طرفی:

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABNM} \Rightarrow \frac{۵+۹}{۲} \cdot h = ۲ \times \frac{x+۵}{۲} \cdot h_۱$$

$$\Rightarrow ۷h = (x+۵)h_۱ \Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{x+۵}{۷} \quad (۲)$$

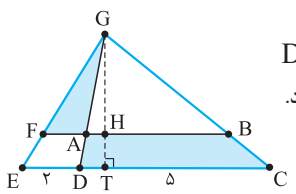
از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{x+۵}{۷} = \frac{۲x+۱۴}{x+۹} \Rightarrow x^۲ + ۱۴x + ۴۵ = ۱۴x + ۹۸$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۵۳ \Rightarrow x = \sqrt{۵۳}$$

۱۲۶- گزینهٔ ۳

اگر $AD = x$، آن‌گاه $DG = ۳x$ و در نتیجه $AG = ۲x$ خواهد بود.



در مثلث GED بنا بر نتیجهٔ قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{FA}{ED} = \frac{GA}{GD} \Rightarrow \frac{FA}{۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow FA = \frac{۴}{۳}$$

همچنین در مثلث GDC داریم:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{GA}{GD} \Rightarrow \frac{AB}{۵} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۳}$$

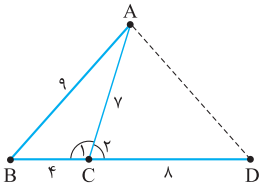
اگر GT بر AB عمود باشد و FB را در نقطهٔ H قطع کند، آن‌گاه بنابر قضیهٔ تالس $GH = ۲HT$. اکنون داریم:

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{۲}FA \times GH}{\frac{۱}{۲}(AB+CD) \times HT} = \frac{FA}{AB+CD} \times \frac{GH}{HT}$$

$$= \frac{\frac{۴}{۳}}{\frac{۱۰}{۳}+۵} \times \frac{۲}{۱} = \frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{۲۵}{۳}} = \frac{۸}{۲۵} = ۰/۳۲ = ٪۳۲$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۲۷- گزینهٔ ۱ در مثلث ABC بنا بر رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:



$$\cos\hat{C}_1=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\times BC}$$
$$=\frac{7^2+4^2-9^2}{2\times7\times4}=-\frac{2}{7}$$

چون زاویه‌های $\hat{C}_1$ و $\hat{C}_2$ مکمل یکدیگرند، پس کسینوس این دو زاویه، قرینهٔ یکدیگرند، در نتیجه $\cos\hat{C}_2=\frac{2}{7}$.

در مثلث ACD بنا بر رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AD^2=AC^2+CD^2-2AC\times CD\times\cos\hat{C}_2$$
$$AD^2=7^2+8^2-2\times7\times8\times\frac{2}{7}=64+49-32=81\Rightarrow AD=9$$

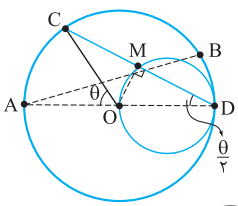
۱۲۸- گزینهٔ ۴

چندنکته

۱) طول کمانی از دایره به شعاع R که زاویهٔ مرکزی نظیر آن θ رادیان باشد، برابر است با $L=\theta R$.

۲) اگر از مرکز دایره‌ای عمودی بر یک وتر رسم کنیم، آن وتر را نصف می‌کند.

اگر زاویهٔ مرکزی نظیر کمان $\overset{\frown}{AC}$ را θ بگیریم، خواهیم داشت:



$$L_{\overset{\frown}{AC}}=\theta R\Rightarrow\frac{4\pi}{3}=\theta\times4$$
$$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

زاویهٔ $\hat{D}$ محاطی و مقابل به کمان $\overset{\frown}{AC}$ است، پس نصف آن می‌باشد؛ یعنی:

$$\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}=\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6}$$

در دایرهٔ کوچک‌تر، زاویهٔ $\hat{M}$ محاطی و مقابل به قطر است، پس این زاویه قائمه می‌باشد؛ به بیان دیگر OM بر وتر CD عمود است، پس M وسط CD است و در نتیجه $MC=MD$.

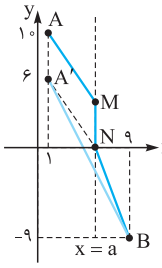
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMD داریم:

$$\cos\hat{D}=\frac{MD}{OD}\Rightarrow\cos\frac{\pi}{6}=\frac{MD}{4}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{MD}{4}$$
$$\Rightarrow MD=MC=2\sqrt{3}$$

اکنون در دایرهٔ بزرگ‌تر، بنا بر قضیهٔ وترهای متقاطع داریم:

$$AM\times MB=MC\times MD=2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=12$$

۱۲۹- گزینهٔ ۱ نقطهٔ A را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. چون طول MN برابر ۴ واحد و موازی با محور yها است، پس $A'(1,6)$.



چهارضلعی $AMNA'$ متوازی‌الاضلاع است، پس طول مسیر AMNB با طول مسیر $AA'NB$ برابر است و داریم:

طول مسیر AMNB = طول مسیر $AA'NB$
$=AA'+A'N+NB$ (۱)

در مثلث $A'NB$، بنا بر نامساوی مثلثی داریم:

$A'N+NB\geq A'B$ (۲)

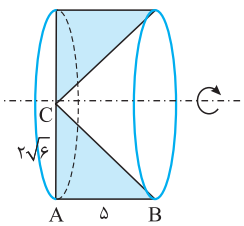
از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود طول مسیر مورد نظر، زمانی کم‌ترین مقدار ممکن است که مثلث $A'NB$ به یک پاره‌خط راست تبدیل شود؛ به بیان دیگر N روی پاره‌خط $A'B$ باشد و در این صورت، طول کوچک‌ترین مسیر برابر است با $AA'+A'B$ و از آن‌جا که:

$$A'B=\sqrt{(1-9)^2+(6+9)^2}=\sqrt{289}=17$$

خواهیم داشت:

طول کوچک‌ترین مسیر $=AA'+A'B=4+17=21$

۱۳۰- گزینهٔ ۴ جسم حاصل از دوران، یک استوانه است که مخروطی از آن بیرون آورده شده است.



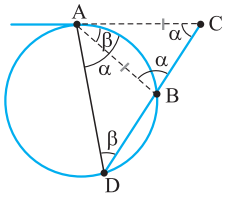
شعاع قاعدهٔ استوانه و مخروط برابر $R=AC=2\sqrt{6}$ و ارتفاع هر یک است $h=AB=5$.

حجم جسم حاصل از دوران = حجم استوانه − حجم مخروط

$$=\pi R^2h-\frac{\pi}{3}R^2h=\frac{2\pi}{3}R^2h=\frac{2\pi}{3}(2\sqrt{6})^2\times5$$
$$=\frac{2\pi}{3}\times24\times5=80\pi$$

۱۳۱- گزینهٔ ۴ چون $AC=AB$، پس $\hat{C}=\hat{B}=\alpha$.

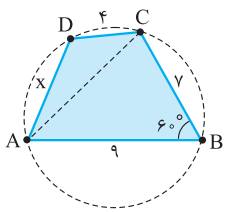
زاویهٔ $B\hat{A}C$ ظلی و زاویهٔ $\hat{D}$ محاطی و هر دو نصف کمان $\overset{\frown}{AB}$ هستند، پس $B\hat{A}C=\hat{D}=\hat{\beta}$.



دو مثلث ABC و ACD دو زاویهٔ برابر دارند، پس زاویهٔ سوم این دو مثلث نیز برابرند یعنی $C\hat{A}D=A\hat{B}C=\alpha$.

در مثلث ACD دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{C}$ برابر α هستند، پس مثلثی متساوی‌الساقین است، در نتیجه $AD=CD$.

۱۳۲- گزینهٔ ۲ در یک چهارضلعی محاطی، هر دو زاویهٔ مقابل، مکمل یکدیگرند، پس $\hat{D}=120^\circ$.



در مثلث ABC با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

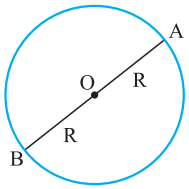
$$AC^2=BC^2+BA^2-2BC\times BA\times\cos\hat{B}$$
$$AC^2=7^2+9^2-2\times7\times9\times\frac{1}{2}=67$$

اکنون در مثلث ADC با استفاده از رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AC^2=CD^2+AD^2-2CD\times AD\times\cos\hat{D}$$
$$67=16+x^2-2\times4x\times\frac{-1}{2}\Rightarrow x^2+4x-51=0$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4-4-51=0$$
$$\Rightarrow(x+2)^2=55\Rightarrow x+2=\sqrt{55}$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۳۳- گزینهٔ ۱ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ A و B دایره‌ای است که AB قطر آن باشد.



در واقع صورت سؤال این بوده: «دایره‌ای که دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$ دو سر قطری از آن باشند، محور x‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟»

باید معادلهٔ دایره را بنویسیم، پس به مرکز و شعاع نیاز داریم.

O وسط A و B است، بنابراین: $O(\frac{۲+(-۴)}{۲},\frac{۵+۱}{۲})=(-۱,۳)$

از طرفی $۲R=AB$، پس:

$$AB=\sqrt{(-۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۵۲}=۲\sqrt{۱۳}$$
$$\Rightarrow R=\sqrt{۱۳}$$

حالا که مرکز و شعاع دایره را داریم، معادلهٔ دایره به راحتی نوشته می‌شود.

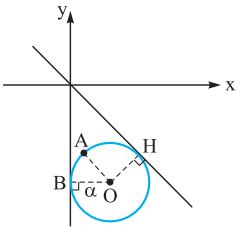
معادلهٔ دایره: $(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳$

کافی است معادلهٔ دایره را با محور x‌ها $(y=۰)$ تلاقی دهیم.

$$(x+۱)^۲+(y-۳)^۲=۱۳ \xrightarrow{y=۰} (x+۱)^۲+۹=۱۳$$
$$\Rightarrow (x+۱)^۲=۴ \Rightarrow \begin{cases} x+۱=۲ \Rightarrow x=۱ \\ x+۱=-۲ \Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

دایره، محور x‌ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و -۳ قطع می‌کند.

۱۳۴- گزینهٔ ۲ فرض می‌کنیم مرکز دایره، نقطهٔ $O(\alpha,\beta)$ باشد، داریم:



$$OB=OA=OH=R$$

بنابراین:

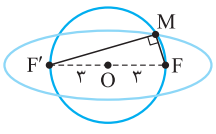
$$OH=OB \Rightarrow \frac{|۴\alpha+۳\beta|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=|\alpha|$$
$$\Rightarrow |۴\alpha+۳\beta|=۵\alpha \Rightarrow \begin{cases} ۴\alpha+۳\beta=۵\alpha \Rightarrow \alpha=۳\beta \\ -۴\alpha-۳\beta=۵\alpha \Rightarrow \beta=-۳\alpha \end{cases}$$
$$\xrightarrow[\beta<۰]{\alpha>۰} \beta=-۳\alpha$$

با توجه به روابط $\beta=-۳\alpha$ و $OB=OA$ داریم:

$$\alpha=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(\beta+۴)^۲}$$
$$\xrightarrow{\beta=-۳\alpha} \alpha=\sqrt{(\alpha-۱)^۲+(-۳\alpha+۴)^۲}$$
$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^۲=۱۰\alpha^۲-۲۶\alpha+۱۷$$
$$\Rightarrow ۹\alpha^۲-۲۶\alpha+۱۷=۰ \Rightarrow (۹\alpha-۱۷)(\alpha-۱)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=۱ \\ \alpha=\frac{۱۷}{۹} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین شعاع دایره برابر $\frac{۱۷}{۹}$ است.

۱۳۵- گزینهٔ ۳ طول قطرهای بیضی را داریم، با توجه به رابطهٔ $a^۲-b^۲=c^۲$، فاصلهٔ کانونی بیضی را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} ۲a=۸ \Rightarrow a=۴ \\ ۲b=۲\sqrt{۷} \Rightarrow b=\sqrt{۷} \end{cases}$$
$$a^۲-b^۲=c^۲ \Rightarrow ۱۶-۷=c^۲ \Rightarrow c=۳$$

مرکز بیضی و دایره یکی است پس شعاع دایره برابر ۳ است.

زاویهٔ M محاطی و روبه‌رو به کمان ۱۸۰° است، پس: $\hat{M}=۹۰^\circ$

می‌دانیم $MF+MF'=۲a$ است، بنابراین: $MF+MF'=۸$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} MF^۲+MF'^۲+۲MF\times MF'=۶۴$$
$$\xrightarrow[MF^۲+MF'^۲=۶^۲]{\text{فیثاغورس}} ۳۶+۲MF\times MF'=۶۴$$
$$\Rightarrow MF\times MF'=۱۴$$

MF و MF′ ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دومی هستند که ضرب و جمع ریشه‌های آن‌ها را داریم.

$$\begin{cases} MF+MF'=۸ \\ MF\times MF'=۱۴ \end{cases} \Rightarrow x^۲-۸x+۱۴=۰$$
$$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}} \begin{cases} x_۱=MF=۴-\sqrt{۲} \\ x_۲=MF'=۴+\sqrt{۲} \end{cases}$$

پس فاصلهٔ M تا نزدیک‌ترین کانون برابر $۴-\sqrt{۲}$ است.

۱۳۶- گزینهٔ ۲ معادلهٔ داده‌شده را استاندارد می‌کنیم:

$$(y+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}=-bx-۱ \Rightarrow (y+\frac{a}{۲})^۲=-b(x-\frac{a^۲-۴}{۴b})$$

بنابراین رأس سهمی عبارت است از: $S(\frac{a^۲-۴}{۴b},\frac{-a}{۲})$

از آن‌جا که سهمی افقی است چون $y^۲$ دارد پس عرض نقاط S و F برابر است؛ یعنی:

$$\frac{-a}{۲}=-۲ \Rightarrow a=۴$$

از طرفی پارامتر سهمی برابر است با $\frac{-b}{۴}$.

اگر از رأس سهمی $\frac{-b}{۴}$ در راستای محور x‌ها حرکت کنیم، کانون به دست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{a^۲-۴}{۴b}-\frac{b}{۴}=-\frac{۱}{۴} \xrightarrow{a=۴} \frac{۳}{b}-\frac{b}{۴}=\frac{-۱}{۴}$$
$$\Rightarrow \frac{۱۲-b^۲}{۴b}=\frac{-۱}{۴} \Rightarrow b^۲-b-۱۲=۰$$
$$\Rightarrow (b-۴)(b+۳)=۰ \Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ b=-۳ \end{cases}$$

واضح است که کوچک‌ترین مقدار b، -۳ است.

۱۳۷- گزینهٔ ۴ ابتدا $A^۲$ را به دست می‌آوریم:

$$A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ -۲ & -۳ & -۷ \\ ۴ & ۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

چون سؤال فقط سطر اول $A^۳$ را خواسته، کافی است سطر اول $A^۲$ را در A ضرب کنیم.

$$A^۳=\begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۲۴ \\ -۲ & -۳ & -۷ \\ ۴ & ۱ & ۹ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۵ \\ -۳ & ۰ & ۴ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳۰ & ۶ & ۸۶ \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

۱۳۸- گزینهٔ ۳ اگر B و C ماتریس‌های وارون‌پذیر و ماتریس A مجهول باشد به طوری که $BAC=D$، آن‌گاه: $A=B^{-۱}DC^{-۱}$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

بنابراین:
$$X=\begin{bmatrix}2&3\\4&5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}^{-1}$$
$$\Rightarrow X=(\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix})(4\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix})(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix})$$
$$\Rightarrow X=-\underbrace{\begin{bmatrix}5&-3\\-4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}}$$
$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-5&3\\4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\8&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&7\\-4&-4\end{bmatrix}$$

۱۳۹- گزینهٔ ۳ نسبت به سطر اول، دترمینان می‌گیریم:
$$-4\begin{vmatrix}2-x&1\\2&3-x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\3&3-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2-x\\3&2\end{vmatrix}=0$$
$$-4(6-5x+x^2-2)-(3-x-3)+(2-6+3x)=0$$
$$\Rightarrow 4x^2-20x+16-x-3x+4=0$$
$$\Rightarrow 4x^2-24x+20=0 \xrightarrow{\div 4} x^2-6x+5=0$$
$$\Rightarrow (x-5)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases}x=5\\x=1\end{cases}$$

۱۴۰- گزینهٔ ۱ اگر x مثبت یا $0\le x\le -1$ باشد، آن‌گاه $2x+3$ بزرگ‌ترین ضلع مثلث است و بنا بر رابطهٔ فیثاغورس داریم:
$$(2x+3)^2=(2x+1)^2+(x+1)^2$$
$$\Rightarrow 4x^2+12x+9=4x^2+4x+1+x^2+2x+1$$
$$\Rightarrow x^2-6x-7=0$$
ریشه‌های معادلهٔ اخیر $x=-1$ و $x=7$ هستند اگر $x=-1$ باشد، طول ضلع $x+1$، صفر است که قابل قبول نیست و اگر $x=7$ باشد، آن‌گاه دو ضلع زاویهٔ قائمه $2x+1=15$ و $x+1=8$ هستند و مساحت مثلث $S=\frac{1}{2}\times 15\times 8=60$ است.
چنان‌چه $x<-1$ باشد، آن‌گاه $x+1<0$ و طول یکی از اضلاع مثلث منفی است که ناممکن می‌باشد.

۱۴۱- گزینهٔ ۲ اگر عددی بخواهد بخش‌پذیر بر ۵ باشد، یکان آن باید صفر یا ۵ باشد. در هر دو حالت تعداد حالت‌ها را پیدا کرده با هم جمع می‌کنیم.

یکان عدد صفر باشد: $9\times 8\times 7\times 1=504$
یکان عدد ۵ باشد: $8\times 8\times 7\times 1=448$
$\xrightarrow{\oplus} 504+448=952$

دقت کنید هزارگان نمی‌تواند صفر باشد، چون عدد چهاررقمی نمی‌شود.

۱۴۲- گزینهٔ ۴ می‌دانیم هر جمله از بسط $(a+b+c)^{12}$ (ضریب ↑) به صورت $na^xb^yc^z$ است که در آن $x+y+z=12$ است. *(چون دوازده‌تا پرانتز تو هم ضرب می‌شه. برای مثال جملهٔ اول a^{12} است، جملهٔ دوم $12a^{11}b$ و ... به همین ترتیب جملهٔ آخر c^{12}).* بنابراین کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x+y+z=12$ را پیدا کنیم. می‌دانیم تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$ بنابراین:
$$k=3, n=12 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1}=\binom{14}{2}=91$$

۱۴۳- گزینهٔ ۲ بدترین حالتی که هیچ چهار کتاب هم‌موضوعی انتخاب نشوند را در نظر می‌گیریم. از کتاب‌های ادبی سه کتاب، از کتاب‌های ریاضی سه کتاب و هر دو کتاب هنر را برمی‌داریم. در این صورت تا این‌جا ۸ کتاب برداشته‌ایم که هیچ چهارتایی هم‌موضوع نیستند. اما با انتخاب کتاب نهم حتماً چهار کتاب هم‌موضوع خواهیم داشت.

۱۴۴- گزینهٔ ۳ می‌دانیم تعداد کل عددهای دورقمی ۹۰ تا است:
$$n(S)=\underset{\downarrow}{9}\times\underset{\text{دهگان نمی‌تواند صفر باشد.}}{10}=90$$
تعداد اعداد دورقمی مضرب ۳ را با A و تعداد اعداد دورقمی مضرب ۵ را با B نشان می‌دهیم. می‌خواهیم $|A\cup B|$ را پیدا کنیم. می‌دانیم $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. داریم:
$$|A|=\left[\frac{99}{3}\right]-\left[\frac{9}{3}\right]=33-3=30$$
$$|B|=\left[\frac{99}{5}\right]-\left[\frac{9}{5}\right]=19-1=18$$
$$|A\cap B|=\left[\frac{99}{15}\right]-\left[\frac{9}{15}\right]=6-0=6$$
یعنی هم بر ۳ بخش‌پذیر باشد هم بر ۵ یعنی مضرب ۱۵.
$$\Rightarrow |A\cup B|=30+18-6=42$$
$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$$

۱۴۵- گزینهٔ ۱ روش ۱ می‌دانیم وقتی یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم، مجموع عددهای روشده از ۳ تا ۱۸ تغییر می‌کند و تعداد حالت‌ها تقارن دارد. یعنی اگر مجموع حالت‌ها را x فرض کنیم، داریم:

$n(x=3)=n(x=18)$
$n(x=4)=n(x=17)$
$n(x=5)=n(x=16)$
$n(x=6)=n(x=15)$
$n(x=7)=n(x=14)$
$n(x=8)=n(x=13)$
$n(x=9)=n(x=12)$
$n(x=10)=n(x=11)$

بنابراین:
$$n(x=3)+n(x=5)+n(x=7)+n(x=9)$$
$$+n(x=11)+n(x=13)+n(x=15)+n(x=17)$$
$$=n(x=18)+n(x=16)+n(x=14)+n(x=12)$$
$$+n(x=10)+n(x=8)+n(x=6)+n(x=4)$$
و چون تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $n(S)=6\times 6\times 6=216$
پس تعداد کل حالت‌های فرد برابر است با نصف آن یعنی: ۱۰۸
حالا تعداد حالت‌هایی را بررسی می‌کنیم که یکی از تاس‌ها ۲ باشد:
$n(x=3)$ مجموع سه تاس ۳ باشد.
$\Rightarrow$ امکان‌پذیر نیست چون جمع دوتای دیگر باید ۱ شود.
$n(x=5)$ مجموع سه تاس ۵ باشد. $\Rightarrow$ ۲،۱،۲ سه حالت

$n(x=۷)$ مجموع سه تاس ۷ باشد.
- ۲,۱,۴ ⇒ ۶ حالت
- ۲,۲,۳ ⇒ ۳ حالت

$\xrightarrow{\oplus}$ روی هم ۹ حالت

$n(x=۹)$ مجموع سه تاس ۹ باشد.
- ۲,۱,۶ ⇒ ۶ حالت
- ۲,۲,۵ ⇒ ۳ حالت
- ۲,۳,۴ ⇒ ۶ حالت

$\xrightarrow{\oplus}$ روی هم ۱۵ حالت

$n(x=۱۱)$ مجموع سه تاس ۱۱ باشد.
- ۲,۴,۵ ⇒ ۶ حالت
- ۲,۶,۳ ⇒ ۶ حالت

$\xrightarrow{\oplus}$ روی هم ۱۲ حالت

$n(x=۱۳)$ مجموع سه تاس ۱۳ باشد.
- ۲,۵,۶ ⇒ ۶ حالت

$n(x=۱۵)$ ⇒ مجموع ۳ تاس ۱۵ باشد.
امکان‌پذیر نیست چون باید جمع دو تاس دیگر ۱۳ شود.
$n(x=۱۷)$ ⇒ مجموع سه تاس ۱۷ شود.
این هم امکان‌پذیر نیست چون باید مجموع دو تاس دیگر برابر ۱۵ شود!

بنابراین تعداد کل حالت‌های مطلوب که مجموع سه تاس عددی فرد و دست‌کم یکی از تاس‌ها ۲ باشد، برابر است با:

$$۳+۹+۱۵+۱۲+۶=۴۵ \Rightarrow P=\frac{۴۵}{۱۰۸}=\frac{۵}{۱۲}$$

روش ۲ اگر بدانید تعداد حالات مجموع فرد نصف حالت‌هاست کارتان خیلی راحت است. (علتش را در روش ۱ توضیح دادیم.)

تعداد کل حالات $=۶\times۶\times۶=۲۱۶$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالات مجموع فرد}=\frac{۲۱۶}{۲}=۱۰۸$$

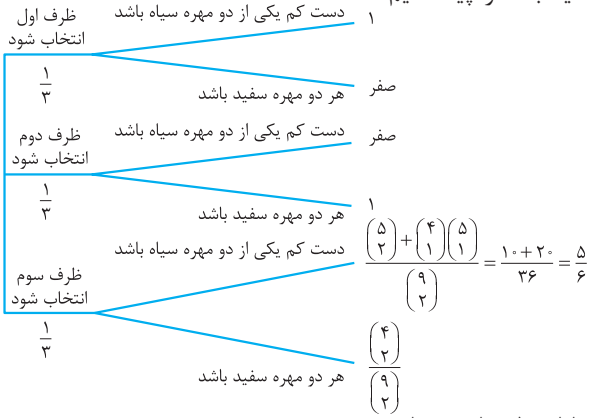
حالا اگر قرار باشد لااقل یک تاس ۲ بیاید، پس دو تاس دیگر باید یکی زوج و دیگری فرد بیاید که مجموع سه تاس فرد شود. روی عددهای زوج حالت‌بندی می‌کنیم:

- ۲,۲,فرد $\Rightarrow (۱\times۱\times۳)\times\frac{۳!}{۲!}=۹$
- ۲,۴,فرد $\Rightarrow (۱\times۱\times۳)\times۳!=۱۸$
- ۲,۶,فرد $\Rightarrow (۱\times۱\times۳)\times۳!=۱۸$

$\xrightarrow{\oplus}$ ۴۵

بنابراین احتمال مورد نظر برابر است با: $P=\frac{۴۵}{۱۰۸}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۴۶- گزینه ۲ ابتدا باید یکی از ظرف‌ها را به تصادف انتخاب کنیم، سپس احتمال این‌که دست‌کم یکی از ۲ مهرهٔ انتخاب‌شده سیاه باشد را پیدا کنیم.



$$\Rightarrow P(\text{دست‌کم یکی از دو مهره سیاه باشد.})=\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times\frac{۵}{۶}=\frac{۱۱}{۱۸}$$

۱۴۷- گزینه ۲ می‌دانیم $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ بنابراین:

$$۰/۲۵=\frac{P(A\cap B)}{۰/۴} \Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$$

از طرفی $P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}$. داریم:

$$P(B|A')=\frac{P(B-A)}{P(A')}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{۱-P(A)}$$
$$=\frac{۰/۳-۰/۱}{۱-۰/۴}=\frac{۰/۲}{۰/۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۴۸- گزینه ۳

تذکر منظور از فراوانی نسبی در این سؤال درصد فراوانی نسبی است.

روش ۱ می‌خواهیم میانگین داده‌ها را پیدا کنیم. می‌دانیم میانگین برابر است با مجموع داده‌ها تقسیم بر تعداد آن‌ها و وقتی می‌خواهیم میانگین را از جدول فراوانی یا نمودار پیدا کنیم از رابطهٔ $\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$ استفاده می‌کنیم. یعنی هر داده در فراوانی‌اش ضرب شده و عددها با هم جمع می‌شوند، سپس تقسیم بر تعداد کل داده‌ها می‌شود.

حالا فراوانی‌های نسبی را داریم:

$$\frac{f_۱}{\sum f}=\frac{۱۲}{۱۰۰} \Rightarrow f_۱=\frac{۱۲\sum f}{۱۰۰}$$
$$\frac{f_۲}{\sum f}=\frac{۱۸}{۱۰۰} \Rightarrow f_۲=\frac{۱۸\sum f}{۱۰۰}$$
$$\frac{f_۳}{\sum f}=\frac{۳۵}{۱۰۰} \Rightarrow f_۳=\frac{۳۵\sum f}{۱۰۰}$$
$$\frac{f_۴}{\sum f}=\frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow f_۴=\frac{۱۰\sum f}{۱۰۰}$$
$$\frac{f_۵}{\sum f}=\frac{۲۵}{۱۰۰} \Rightarrow f_۵=\frac{۲۵\sum f}{۱۰۰}$$

حالا داریم:

$$\bar{x}=\frac{\frac{۱۲\sum f}{۱۰۰}\times۷+\frac{۱۸\sum f}{۱۰۰}\times۱۲+\frac{۳۵\sum f}{۱۰۰}\times۱۳+\frac{۱۰\sum f}{۱۰۰}\times۱۷+\frac{۲۵\sum f}{۱۰۰}\times۱۹}{\sum f}$$

که با ساده‌شدن $\sum f$ها داریم:

$$\bar{x}=\frac{۱۲\times۷+۱۸\times۱۲+۳۵\times۱۳+۱۰\times۱۷+۲۵\times۱۹}{۱۰۰}=۱۴$$

روش ۲ برای سادگی کار می‌توانستیم فراوانی نسبی را همان فراوانی بگیریم و تعداد کل داده‌ها را ۱۰۰ بگیریم:

$$\bar{x}=\frac{۱۲\times۷+۱۸\times۱۲+۳۵\times۱۳+۱۰\times۱۷+۲۵\times۱۹}{۱۰۰}=۱۴$$

۱۴۹- گزینه ۲ عدد را a فرض می‌کنیم. با توجه به رابطهٔ داده‌شده داریم:

$$\begin{array}{c|c} a & ۴۳۰ \\ \hline q^۲ & q \end{array} \Rightarrow a=۴۳۰q+q^۲ \quad , \quad ۰\le q^۲<۴۳۰$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

چون گفته عدد طبیعی باشد: $\Rightarrow 0<q<20/7$ (I)

حالا می‌خواهیم عدد مضرب ۹ باشد، یعنی:

$$a\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow 430q+q^2\overset{9}{\equiv}0 \xrightarrow{430\overset{9}{\equiv}7} 7q+q^2\overset{9}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow q(q+7)\overset{9}{\equiv}0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow q=9,18 \\ q+7\overset{9}{\equiv}0 \Rightarrow q\overset{9}{\equiv}-7\overset{9}{\equiv}2 \Rightarrow q=2,11,20 \end{cases}$$

با توجه به (I) پس تعداد کل حالت‌ها ۵ تا است.

۱۵۰- گزینه ۴ می‌دانیم اگر $(a,b)=d$ باشد، آن‌گاه:

$$d|a \Rightarrow a=a'd$$
$$d|b \Rightarrow b=b'd$$
$$[a,b]=[a'd,b'd]=a'b'd$$

و $(a',b')=1$ چرا که در غیر این صورت d ب.م.م نمی‌شود.

بنابراین در این سؤال داریم:

$$[a,b]=60(a,b) \Rightarrow a'b'd=60d \Rightarrow a'b'=60$$

$a'+b'=61 \leftarrow$	1 | 60
	2 | 30 ✗
$a'+b'=13 \leftarrow$	3 | 10
$a'+b'=19 \leftarrow$	4 | 15
$a'+b'=17 \leftarrow$	5 | 12
	6 | 10 ✗

این دو حالت غیرقابل قبول‌اند. (چون نسبت به هم اول نیستند.)

از طرفی مجموع دو عدد برابر ۱۳۶ است. یعنی:

$$a+b=136 \Rightarrow a'd+b'd=136 \Rightarrow d(a'+b')=136$$

حالا با توجه به این‌که $136=17\times 2^3$ است، تنها حالت قابل قبول برای $a'+b'$ حالت $a'+b'=17$ است بنابراین:

$$17d=136 \Rightarrow d=8 \Rightarrow \begin{cases} a=8\times 12=96 \\ b=8\times 5=40 \end{cases}$$
$$\Rightarrow a-b=56$$

۱۵۱- گزینه ۳ می‌خواهیم 2^n-1 بر ۲۱۷ بخش‌پذیر باشد، بنابراین:

$$2^n-1\overset{217}{\equiv}0 \Rightarrow 2^n\overset{217}{\equiv}1$$

حالا با توجه به این‌که $217=7\times 31$ است، می‌توان نوشت:

$$2^3\overset{7}{\equiv}1 \qquad 2^5\overset{31}{\equiv}1$$

برای این‌که توان‌ها را یکی کنیم رابطهٔ بالا را به توان ۵ و رابطهٔ پایین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$2^3\overset{7}{\equiv}1 \xrightarrow{\text{به توان ۵}} 2^{15}\overset{7}{\equiv}1$$
$$2^5\overset{31}{\equiv}1 \xrightarrow{\text{به توان ۳}} 2^{15}\overset{31}{\equiv}1$$

$$\Rightarrow 2^{15}\overset{7\times 31}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{15}\overset{217}{\equiv}1 \Rightarrow 2^{15k}\overset{217}{\equiv}1$$

پس n باید به صورت $15k$ باشد. مقادیر دورقمی n را پیدا می‌کنیم:

$$10\le n\le 99 \Rightarrow 10\le 15k\le 99 \Rightarrow k=1,2,\ldots,6$$

یعنی ۶ عدد دورقمی داریم.

۱۵۲- گزینه ۲ عددها را باز می‌کنیم:

$$\overline{aabb}=1000a+100a+10b+b=11(100a+b)$$
$$\overline{cc}^2=(10c+c)^2=(11c)^2=121c^2$$
$$\Rightarrow 11(100a+b)=121c^2$$
$$\xrightarrow{\div 11} 100a+b=11c^2 \quad (I)$$

سمت راست تساوی مضرب ۱۱ است، پس $100a+b$ نیز باید مضرب ۱۱ باشد.

بنابراین: $100a+b\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow a+b\overset{11}{\equiv}0 \Rightarrow a+b=11$ (II)

دقت کنید a و b دو عدد یک‌رقمی هستند. یعنی $1\le a\le 9$ (چون عدد چهاررقمی است و a نمی‌تواند صفر باشد.) و $0\le b\le 9$ پس $1\le a+b\le 18$ و در میان این عددها فقط ۱۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

حالا رابطهٔ (I) را دوباره می‌نویسیم:

$$100a+b=11c^2 \Rightarrow 99a+a+b=11c^2$$
$$\Rightarrow 99a+11=11c^2 \xrightarrow{\div 11} 9a+1=c^2$$

بنابراین $1\le a\le 9$ باید طوری باشد که $9a+1$ مربع کامل باشد. بررسی می‌کنیم به ازای چه مقادیری از a عدد $9a+1$ مربع کامل می‌شود.

a	$9a+1$
۱	۱۰
۲	۱۹
۳	۲۸
۴	۳۷
۵	۴۶
۶	۵۵
۷	۶۴ ✓
۸	۷۳
۹	۸۲

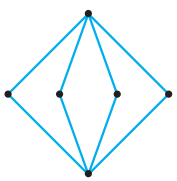
همان‌طور که می‌بینید تنها به ازای $a=7$، c^2 مربع کامل می‌شود.

حالا با توجه به (II) می‌توان گفت:

$$7+b=11 \Rightarrow b=4 \Rightarrow a-b=3$$

در واقع عدد ما ۷۷۴۴ است که برابر است با 88^2.

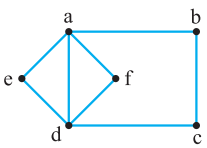
۱۵۳- گزینه ۴ در دو حالت می‌توان این گراف را رسم کرد که در هر دو حالت گراف دارای ۶ دور است:



حالت اول:

$$\binom{4}{2}=6$$

برای داشتن هر دور کافی است رأس‌های بالایی و پایینی و دوتا از رأس‌های وسط را در نظر بگیریم.



حالت دوم:

دو دور به طول ۳ داریم: aeda , afda

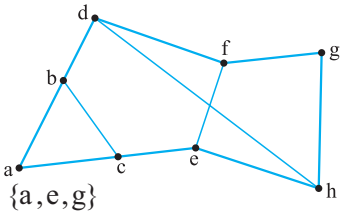
دو دور به طول ۴ داریم: abcda , afdea

دو دور به طول ۵ داریم: abcdea , abcdfa

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۵۴- گزینهٔ ۱ راهی به‌جز بررسی گزینه‌ها نداریم.

۱



$\{a,e,g\}$

b	c	f
c	f	h

رأس‌هایی که رأس a پوشش می‌دهد.
رأس‌هایی که رأس e پوشش می‌دهد.
رأس‌هایی که رأس g پوشش می‌دهد.

بنابراین این مجموعه اصلاً احاطه‌گر نیست زیرا رأس d پوشش داده نشده چه برسد به این‌که مینیمال باشد.

برای محکم‌کاری بقیهٔ گزینه‌ها را هم بررسی می‌کنیم (البته این کارها لازم نیست، چون ما همان اول فهمیدیم جواب ۱ است.)

۲

$\{a,f,g\}$

b	d	f
c	e	h
	g	

همهٔ رأس‌ها پوشش داده شده و هیچ رأسی را نمی‌توان حذف کرد.

اگر a را حذف کنیم، a، b و c پوشش داده نمی‌شود.

اگر f را حذف کنیم، d پوشش داده نمی‌شود.

و اگر g را حذف کنیم، h پوشش داده نمی‌شود.

پس این مجموعه یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

۳

$\{b,c,g\}$

a	a	f
c	b	h
d	e	

همهٔ رأس‌ها پوشش داده شده‌اند.

اگر b حذف شود، d پوشش داده نمی‌شود.

اگر c حذف شود، e پوشش داده نمی‌شود.

اگر g حذف شود، هیچ‌کدام از f، g و h پوشش داده نمی‌شوند.

پس این مجموعه هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

۴

$\{c,f,h\}$

a	d	d
b	e	e
e	g	g

همهٔ رأس‌ها پوشش داده شده‌اند.

اگر c حذف شود، خودش و b و a پوشیده نمی‌شوند.

اگر f حذف شود، خودش و d پوشیده نمی‌شود.

اگر h حذف شود، خودش و g پوشیده نمی‌شود.

پس این مجموعه هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

۱۵۵- گزینهٔ ۲ می‌دانیم تعداد رأس‌های فرد در هر گراف باید زوج باشد. از طرفی گراف K ـ منتظم از مرتبهٔ ۷ است پس K باید حتماً زوج باشد. حالت‌ها را بررسی می‌کنیم:

$K=0 \Rightarrow$ گراف تهی می‌شود که قابل قبول نیست.

$K=2 \Rightarrow$ ۲ ـ منتظم مرتبهٔ ۷ قابل قبول است.

$K=4 \Rightarrow$ ۴ ـ منتظم مرتبهٔ ۷ قابل قبول است.

$K=6 \Rightarrow$ گراف ۶ ـ منتظم مرتبهٔ ۷ می‌شود یعنی گراف کامل می‌شود که قابل قبول نیست.

پس برای K فقط دو مقدار قابل قبول است.

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

فیزیک

۱۵۶- گزینهٔ ۳ آرایش دوقطبی‌های مغناطیسی در مواد پارامغناطیسی به صورت کاتوره‌ای است و این دوقطبی‌ها در میدان مغناطیسی قوی تا حدی در جهت خطوط میدان متمایل می‌شوند و بلافاصله پس از حذف میدان به حالت کاتوره‌ای اولیهٔ خود بازمی‌گردند. بنابراین مواد پارامغناطیسی در حضور میدان مغناطیسی قوی، خاصیت مغناطیسی **ضعیف و موقت** پیدا می‌کنند.

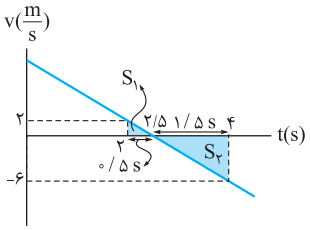
۱۵۷- گزینهٔ ۳ گام اول: برای آن‌که جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ سوم (یعنی بازهٔ زمانی ۲ s تا ۳ s) صفر شود باید در وسط این بازه تغییر جهت داده باشد. یعنی در لحظهٔ $t' = ۲/۵\ s$، سرعت متحرک صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

گام دوم: به کمک رابطهٔ شتاب $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، سرعت متحرک در لحظهٔ $t_۱ = ۲\ s$ و $t_۲ = ۴\ s$ را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{v_{۲/۵} - v_۲}{t_{۲/۵} - t_۲} \Rightarrow -۴ = \frac{۰ - v_۲}{۰/۵} \Rightarrow v_۲ = ۲\ m/s$$

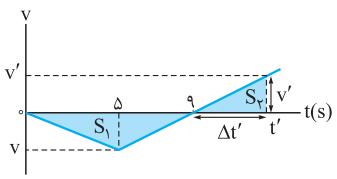
$$a = \frac{v_۴ - v_{۲/۵}}{t_۴ - t_{۲/۵}} \Rightarrow -۴ = \frac{v_۴ - ۰}{۱/۵} \Rightarrow v_۴ = -۶\ m/s$$

گام سوم: نمودار سرعت ـ زمان این متحرک مطابق شکل مقابل است. مسافت طی‌شده در بازهٔ ۲ s تا ۴ s برابر مجموع مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ است:



$$\ell(۲\ s, ۴\ s) = S_۱ + S_۲ = \frac{۲ \times ۰/۵}{۲} + \frac{۶ \times ۱/۵}{۲} = ۵\ m$$

۱۵۸- گزینهٔ ۱ گام اول: مطابق شکل زیر سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۵\ s$ را برابر v و سرعت آن را در لحظه‌ای که متحرک دوباره از مبدأ می‌گذرد، v' فرض می‌کنیم. با توجه به این‌که شتاب متحرک در بازهٔ $(۵\ s, t')$ ثابت و یکسان است و با توجه به شکل داریم:



$$a_{(۵s,۹s)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \frac{\Delta v_{(۵s,۹s)}}{\Delta t_{(۵s,۹s)}} = \frac{\Delta v_{(۹s,t')}}{\Delta t_{(۹s,t')}}$$

$$\Rightarrow \frac{۰ - v}{۹ - ۵} = \frac{v' - ۰}{\Delta t'} \Rightarrow v' = \frac{\Delta t' |v|}{۴}$$

گام دوم: برای آن‌که متحرک برای بار دوم از مبدأ عبور کند، باید مساحت زیر نمودار در بازهٔ $(۰, ۹\ s)$ برابر با مساحت زیر نمودار در بازهٔ $(۹\ s, t')$ شود. پس داریم:

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{|v| \times ۹}{۲} = \frac{v' \times \Delta t'}{۲}$$

$$\Rightarrow ۴/۵ |v| = \frac{(\frac{\Delta t' |v|}{۴}) \times \Delta t'}{۲} \Rightarrow \Delta t'^۲ = ۳۶$$

$$\Rightarrow \Delta t' = ۶\ s$$

$$t' = ۹ + \Delta t' = ۹ + ۶ = ۱۵\ s$$

تکنیک: برای آن‌که مسئله را سریع‌تر حل کنید می‌توانیم به جای v مقدار مناسب قرار دهیم؛ مثلاً $v = -۴\ m/s$. این کار ما را سریع‌تر به جواب می‌رساند. (امتحان کنید.)

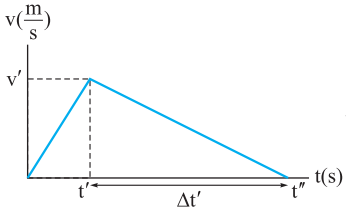
۱۵۹- گزینهٔ ۲ نکتهٔ مهم تست این‌جا است که سرعت متوسط متحرک B در بازهٔ زمانی $(۴\ s, ۱۲\ s)$ برابر سرعت متحرک A است. زیرا در این بازهٔ زمانی هر دو متحرک به یک اندازه جابه‌جا شده‌اند و مقدار $\frac{\Delta x}{\Delta t}$شان یکسان است. پس ما باید ببینیم در چه لحظه‌ای سرعت متحرک B برابر با سرعت متوسط همین متحرک در بازهٔ $(۴\ s, ۱۲\ s)$ می‌شود.

از سوی دیگر از سهمی‌بودن نمودار B می‌فهمیم که حرکت آن با شتاب ثابت است و می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی معین برابر سرعت در لحظهٔ وسط آن بازه است؛ یعنی داریم:

سرعت متوسط در بازهٔ $(۴\ s, ۱۲\ s)$ = سرعت متحرک B در لحظهٔ وسط $(۴\ s, ۱۲\ s)$

پس در لحظهٔ $t' = \frac{۴ + ۱۲}{۲} = ۸\ s$، سرعت متحرک B برابر سرعت متوسط این متحرک در بازهٔ $(۴\ s, ۱۲\ s)$ و برابر سرعت متحرک A است.

۱۶۰- گزینهٔ ۴ گام اول: یکی از بهترین روش‌ها برای حل این تست، رسم نمودار سرعت ـ زمان است (شکل مقابل). شتاب متحرک در بازهٔ $(۰, t')$ برابر $۳\ m/s^۲$ است، پس داریم:



$$a_۱ = \frac{\Delta v_۱}{\Delta t_۱} \Rightarrow ۳ = \frac{v' - ۰}{t' - ۰} \Rightarrow v' = ۳t' \quad (۱)$$

همچنین شتاب متحرک در بازهٔ (t', t'') برابر $-۱\ m/s^۲$ است. یعنی:

$$a_۲ = \frac{\Delta v_۲}{\Delta t_۲} \Rightarrow -۱ = \frac{۰ - v'}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' = v'$$

$$\xrightarrow{(۱)} \Delta t' = ۳t'$$

با توجه به شکل داریم:

$$t'' = t' + \Delta t' = t' + ۳t' = ۴t'$$

تکنیک: مقدار Δv برای دو حرکت تندشونده و کندشونده یکسان است؛ بنابراین طبق رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta v_{(۰,t')} = |\Delta v_{(t',t'')}| \Rightarrow a_۱ t' = |a_۲| \Delta t'$$

$$\Rightarrow ۳t' = ۱ \times (t'' - t') \Rightarrow t'' = ۴t'$$

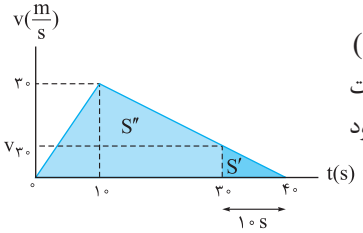
گام دوم: مسافت طی‌شده در کل مسیر ۶۰۰ m است. پس به کمک سطح زیر نمودار می‌توانیم t''، t' و v' را حساب کنیم:

$$S = ۶۰۰ \Rightarrow \frac{v' \times t''}{۲} = ۶۰۰ \Rightarrow \frac{۳t' \times ۴t'}{۲} = ۶۰۰$$

$$\Rightarrow t'^۲ = ۱۰۰$$

$$\Rightarrow t' = ۱۰\ s \Rightarrow \begin{cases} t'' = ۴t' = ۴۰\ s \\ v' = ۳t' = ۳۰\ m/s \end{cases}$$

گام سوم:
شتاب در بازهٔ $(30\,s, 40\,s)$ برابر -1 است، پس سرعت در لحظهٔ $30\,s$ برابر می‌شود با:



$$a_۲ = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۱ = \frac{۰ - v_{۳۰}}{۴۰ - ۳۰} \Rightarrow v_{۳۰} = ۱۰\,m/s$$

حالا با محاسبهٔ مساحت S' به جواب تست نزدیک می‌شویم:

$$S' = \frac{۱۰ \times ۱۰}{۲} = ۵۰\,m$$

تست سطح زیر نمودار در بازهٔ $(۰, ۳۰\,s)$ را می‌خواهد، پس داریم:

$$S'' = ۶۰۰ - S' = ۶۰۰ - ۵۰ = ۵۵۰\,m$$

۱۶۱- گزینهٔ ۲ گام اول: با داشتن انرژی جنبشی لحظهٔ برخورد، سرعت لحظهٔ برخورد را محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۲۴/۲ = \frac{۱}{۲} \times (۰/۱) \times v^۲$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۴۸۴ \Rightarrow v = ۲۲\,m/s$$

گام دوم: شتاب سقوط آزاد $۱۰\,m/s^۲$ است، پس داریم: (v' سرعت گلوله $۱\,s$ قبل از برخورد به زمین است.)

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow ۱۰ = \frac{۲۲ - v'}{۱} \Rightarrow v' = ۱۲\,m/s$$

گام سوم: طبق رابطهٔ $v_{av} = \frac{v' + v}{۲}$ می‌توانیم سرعت متوسط در ثانیهٔ آخر را حساب کنیم:

$$v_{av} = \frac{۱۲ + ۲۲}{۲} = ۱۷\,m/s$$

تکنیک ۱: سرعت برخورد گلوله به زمین $۲۲\,m/s$ است، پس $۱\,s$ قبل از برخورد سرعت گلوله ۱۰ تا (به اندازهٔ g) کم‌تر است و داریم:

$$v' = ۲۲ - ۱۰ = ۱۲ \Rightarrow v_{av} = \frac{۱۲ + ۲۲}{۲} = ۱۷\,m/s$$

تکنیک ۲: اگر شتاب حرکت $۱۰\,m/s^۲$ و اندازهٔ سرعت گلوله در یک لحظه v باشد، اندازهٔ جابه‌جایی گلوله در مدت $۱\,s$ قبل از آن لحظه، $v - ۵$ متر خواهد بود.

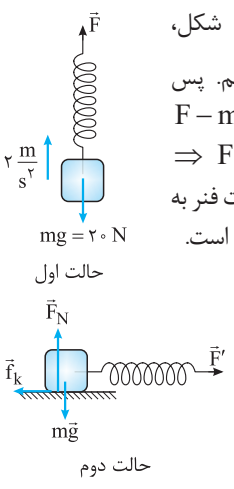
$$\Delta y = ۲۲ - ۵ = ۱۷\,m \Rightarrow v_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱۷}{۱} = ۱۷\,m/s$$

۱۶۲- گزینهٔ ۳ **حالت ۱** مطابق شکل، جسم را با شتاب $۲\,m/s^۲$ بالا می‌بریم. پس داریم:

$$F - mg = ma$$

$$\Rightarrow F - ۲۰ = ۲ \times ۲ \Rightarrow F = ۲۴\,N$$

یعنی نیروی فنر $۲۴\,N$ است و در این حالت فنر به اندازهٔ $\Delta l = ۴۲ - ۳۰ = ۱۲\,cm$ باز شده است.



حالت ۲ در حالت دوم تغییر طول فنر، $\Delta l' = ۳۶ - ۳۰ = ۶\,cm$ است. پس با توجه به رابطهٔ $F = k\Delta l$ می‌توانیم نیروی فنر در این حالت را حساب کنیم.

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \frac{F'}{\Delta l'} = \frac{F}{\Delta l} \Rightarrow \frac{F'}{۶} = \frac{۲۴}{۱۲}$$

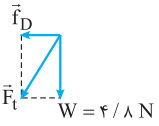
$$\Rightarrow F' = ۱۲\,N$$

حالا با توجه به شکل، حالت دوم داریم:

$$F' - f_k = ma \Rightarrow ۱۲ - \mu_k F_N = ۲ \times ۲$$

$$\xrightarrow{F_N = mg = ۲۰\,N} ۱۲ - ۲۰\mu_k = ۴ \Rightarrow \mu_k = ۰/۴$$

۱۶۳- گزینهٔ ۳ گام اول: جرم توپ برابر $m = \frac{W}{g}$ است. بنابراین:



$$m = \frac{۴/۸}{۱۰} = ۰/۴۸\,kg$$

گام دوم: طبق قانون دوم نیوتون $F_t = ma$ است و در این‌جا با توجه به شکل بالا چون $\vec{f}_D$ و $\vec{W}$ بر هم عمودند، اندازهٔ F_t از رابطهٔ فیثاغورس حساب می‌شود:

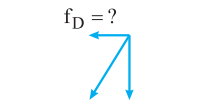
$$F_t^۲ = W^۲ + f_D^۲ \Rightarrow (ma)^۲ = W^۲ + f_D^۲$$

$$\Rightarrow \underbrace{(۰/۴۸ \times \frac{۶۵}{۶})^۲}_{\frac{۴۸}{۱۰۰} \times \frac{۶۵}{۶} = ۵/۲} = (۴/۸)^۲ + f_D^۲$$

$$\Rightarrow f_D^۲ = \underbrace{(۵/۲)^۲ - (۴/۸)^۲}_{\text{مزدوج}} = \underbrace{(۵/۲ + ۴/۸)}_{۱۰}\underbrace{(۵/۲ - ۴/۸)}_{۰/۴} = ۴$$

$$\Rightarrow f_D = ۲\,N$$

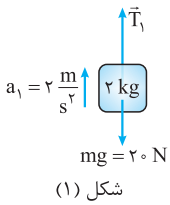
تکنیک: اگر اندازهٔ F_t را حساب کنید، می‌بینید که نیروهای f_D و W با برایندشان (F_t) مثلث $(۵a, ۱۲a, ۱۳a)$ را تشکیل می‌دهند:



$$F_t = ma = ۰/۴۸ \times \frac{۶۵}{۶} = ۵/۲\,N$$

$$W = ۱۲ \times ۰/۴, F_t = ۱۳ \times ۰/۴ \Rightarrow f_D = ۵ \times ۰/۴ = ۲\,N$$

۱۶۴- گزینهٔ ۲ گام اول: ابتدا نیروی کشش طناب در حالت اول را حساب می‌کنیم (شکل ۱):

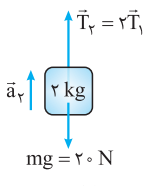


$$F_{t_۱} = ma_۱$$

$$\Rightarrow T_۱ - mg = ma_۱ \Rightarrow T_۱ - ۲۰ = ۲ \times ۲$$

$$\Rightarrow T_۱ = ۲۴\,N$$

گام دوم: حالا $T_۱$ را ۲ برابر می‌کنیم و دوباره رابطهٔ قانون دوم نیوتون را می‌نویسیم (شکل ۲):



$$F_{t_۲} = ma_۲ \Rightarrow ۲T_۱ - mg = ma_۲$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۲۴ - ۲۰ = ۲ \times a_۲$$

$$\Rightarrow a_۲ = \frac{۲۸}{۲} = ۱۴\,m/s^۲$$

گام سوم: نسبت $\frac{a_۲}{a_۱}$ را می‌خواهد، پس داریم:

$$\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{۱۴}{۲} = ۷$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۶۵- گزینهٔ ۱ کافی است که رابطهٔ انرژی جنبشی برحسب تکانه را بنویسید:

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{m^2v^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}$$

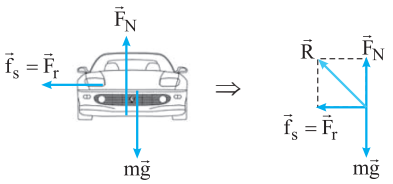
$$\frac{K_A}{K_B}=\frac{\frac{p_A^2}{2m_A}}{\frac{p_B^2}{2m_B}}=(\frac{p_A}{p_B})^2\times\frac{m_B}{m_A}=(\frac{4}{3})^2\times\frac{5}{8}=\frac{10}{9}$$

۱۶۶- گزینهٔ ۲ مطابق شکل زیر نیرویی که از طرف سطح زمین بر خودرو وارد می‌شود (R) برابر برایند دو نیروی عمودی سطح (F_N) و نیروی اصطکاک وارد بر خودرو (f_s) است. از سوی دیگر در این‌جا عامل ایجادکنندهٔ نیروی مرکزگرا همان نیروی اصطکاک است. پس داریم:

$$\begin{cases}R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}\\ f_s=F_r\\ F_N=mg\end{cases}\Rightarrow R^2=(mg)^2+F_r^2$$

$$\Rightarrow F_r^2=R^2-(mg)^2=(\sqrt{10}\times10^4)^2-(3\times10^3\times10)^2$$

$$\Rightarrow F_r^2=10^8\Rightarrow F_r=10^4\ N$$



۱۶۷- گزینهٔ ۱ اول انرژی مکانیکی فنر را به دست می‌آوریم. (فرض می‌کنیم که فرمول $E=\frac{1}{2}kA^2$ را یادمان رفته و آن را اثبات می‌کنیم.)

$$E=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}}E=\frac{1}{2}mA^2(\frac{k}{m})$$

$$\Rightarrow E=\frac{1}{2}kA^2\Rightarrow E=\frac{1}{2}\times(5\times10^2)\times(4\times10^{-2})^2$$

$$=0/4\ J$$

حالا با داشتن E و U به راحتی k و در نتیجه بزرگی سرعت نوسانگر حساب می‌شود: $K=E-U=0/4-0/2=0/2\ J$

$$K=\frac{1}{2}mv^2\Rightarrow 0/2=\frac{1}{2}\times1\times v^2\Rightarrow v^2=0/4=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow v=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ m/s=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\times100\ cm/s=\frac{\sqrt{10}\times100}{5}$$

$$=20\sqrt{10}\ cm/s$$

۱۶۸- گزینهٔ ۲ گام اول: ابتدا از رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ به صورت نسبتی استفاده می‌کنیم تا جرم جسم (m) به دست آید، یعنی می‌نویسیم:

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\xrightarrow[m_2=m-190]{m_1=m}\frac{0/09\pi}{0/1\pi}=\sqrt{\frac{m-190}{m}}$$

$$\Rightarrow\frac{9}{10}=\sqrt{\frac{m-190}{m}}\Rightarrow\frac{81}{100}=\frac{m-190}{m}$$

$$\Rightarrow m=1000\ g=1\ kg$$

گام دوم: حالا برای حالت اول داریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\xrightarrow{m=1\ kg}0/1\pi=2\pi\sqrt{\frac{1}{k}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{20}=\sqrt{\frac{1}{k}}\Rightarrow k=400\ N/m=4\ N/cm$$

۱۶۹- گزینهٔ ۳ گام اول: ابتدا دورهٔ تناوب آونگ را در هر دو حالت به دست می‌آوریم:

$$T=\frac{t}{n}\Rightarrow\begin{cases}\text{حالت اول: } T_1=\frac{72}{40}=\frac{9}{5}\ s\\ \text{حالت دوم: } T_2=\frac{72}{45}=\frac{8}{5}\ s\end{cases}$$

گام دوم: حالا به کمک رابطهٔ $T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، طول آونگ را در دو حالت به دست می‌آوریم:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\xrightarrow{g=\pi^2}T=2\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}}=2\sqrt{L}$$

حالت اول: $\frac{9}{5}=2\sqrt{L_1}\Rightarrow\frac{9}{10}=\sqrt{L_1}$

$$\Rightarrow L_1=0/81\ m=81\ cm$$

حالت دوم: $\frac{8}{5}=2\sqrt{L_2}\Rightarrow\frac{8}{10}=\sqrt{L_2}$

$$\Rightarrow L_2=0/64\ m=64\ cm$$

گام سوم: با توجه به نتیجهٔ گام دوم، واضح است که طول آونگ باید $81\ cm-64\ cm=17\ cm$ کاهش یابد.

۱۷۰- گزینهٔ ۲ می‌دانیم شدت صوت حاصل از چشمه با مربع فاصله از آن نسبت وارون دارد. پس در این‌جا: $\frac{I_1}{I_2}=(\frac{d_2}{d_1})^2$

بنابراین با توجه به رابطهٔ زیر داریم:

$$\beta_1-\beta_2=10\times\log(\frac{I_1}{I_2})\Rightarrow\beta_2-\beta_1=10\times\log(\frac{d_2}{d_1})^2$$

$$\Rightarrow 18=10\times(2\log(\frac{d_2}{d_1}))\Rightarrow 0/9=\log(\frac{d_2}{d_1})$$

$$\Rightarrow 3\times0/3=\log(\frac{d_2}{d_1})\Rightarrow 3\log(2)=\log(\frac{d_2}{d_1})$$

$$\Rightarrow\log(2^3)=\log(\frac{d_2}{d_1})\Rightarrow\frac{d_2}{d_1}=8$$

۱۷۱- گزینهٔ ۲ گام اول: با توجه به نقش موج عرضی داده‌شده، داریم:

$$3\times\frac{\lambda}{2}=120\Rightarrow\lambda=80\ cm=0/8\ m$$

بنابراین دورهٔ تناوب برابر است با:

$$\lambda=vT\Rightarrow 0/8=10\times T\Rightarrow T=0/08\ s$$

گام دوم: طول بازهٔ زمانی داده‌شده برابر $t_2-t_1=0/05-0/01=0/04\ s$، یعنی معادل نصف دورهٔ تناوب $(\frac{T}{2})$ است. می‌دانیم مسافت طی‌شده توسط ذرهٔ M (یا هر ذرهٔ دیگر از طناب) در مدت‌زمان $\frac{T}{2}$ دو برابر دامنهٔ نوسان است. پس:

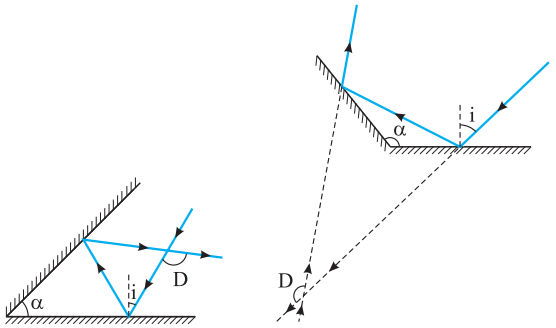
$$\ell=2A=2\times3=6\ cm$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۷۲- گزینهٔ ۴ با توجه به نکتهٔ زیر، در این حالت زاویهٔ γ به زاویهٔ i بستگی ندارد و با تغییر آن تغییری نمی‌کند!

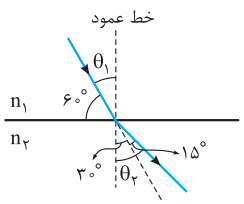
نکته

هرگاه پرتو نوری از هر یک از دو آینهٔ متقاطع تنها یک مرتبه بازتاب کند، زاویهٔ انحراف پرتو نور (یعنی زاویهٔ بین پرتو تابش به آینهٔ اول و پرتو بازتاب از آینهٔ دوم از رابطه‌های زیر به دست می‌آید و به زاویهٔ تابش به آینهٔ اول (i) بستگی ندارد.



$\alpha \le 90 \Rightarrow D = 2\alpha$ $\quad$ $\alpha > 90 \Rightarrow D = 360 - 2\alpha$

۱۷۳- گزینهٔ ۱ گام اول: با توجه به شکل روبه‌رو، زاویهٔ تابش (θ_1) و زاویهٔ شکست (θ_2) برابرند با:



$\theta_1 = 90 - 60 = 30^\circ$

$\theta_2 = 30 + 15 = 45^\circ$

حالا با توجه به قانون شکست عمومی داریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{\sin 45}{\sin 30} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

گام دوم: حالا به سراغ رابطهٔ $\lambda = \frac{v}{f}$ می‌رویم. در این رابطه بسامد نور در دو محیط یکسان است. بنابراین:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}$$

۱۷۴- گزینهٔ ۲ اختلاف دو بسامد تشدیدی متوالی برابر با بسامد اصلی تار است. بنابراین:

$f_1 = 500 - 375 = 125\ Hz$

بنابراین بسامد تشدیدی پس از ۷۵۰ Hz برابر است با:

$750 + 125 = 875\ Hz$

۱۷۵- گزینهٔ ۴ طول موج پنجمین خط رشتهٔ بالمر به ازای $n' = 2$ و $n = n' + 5 = 2 + 5 = 7$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{11}{1000} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49}\right) = \frac{11}{1000} \times \left(\frac{45}{4 \times 49}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1000 \times 4 \times 49}{11 \times 45} \simeq 396\ nm$$

این طول موج مربوط به گسترهٔ امواج فرابنفش است.

۱۷۶- گزینهٔ ۱ رابطهٔ $K_{max} = hf - W_0$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$K_{max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

حالا برای دو فلز A و B داریم:

$$K_{max(A)} = \frac{(4 \times 10^{-15}) \times (3 \times 10^8)}{150 \times 10^{-9}} - 4/5 = 3/5\ eV$$

$$K_{max(B)} = \frac{(4 \times 10^{-15}) \times (3 \times 10^8)}{150 \times 10^{-9}} - 3 = 5\ eV$$

بنابراین خواستهٔ مسئله برابر است با:

$$\frac{K_{max(A)} - K_{max(B)}}{K_{max(B)}} \times 100 = \frac{3/5 - 5}{5} \times 100$$

$$= \frac{-1/5}{5} \times 100 = -\%30$$

۱۷۷- گزینهٔ ۳ گام اول: اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی در فاصلهٔ $r_1 = 30\ cm$ از آن را E_1 و در فاصلهٔ $r_2 = 10\ cm$ از آن را E_2 در نظر می‌گیریم. بنابراین $E_1 = E_2 - 1/6 \times 10^4$ است. حالا می‌نویسیم:

$$E = k\frac{|q|}{r^2} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{E_2 - 1/6 \times 10^4} = \left(\frac{30}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_2 - 1/6 \times 10^4} = 9 \Rightarrow E_2 = 9E_2 - 14/4 \times 10^4$$

$$E_2 = 1/8 \times 10^4\ N/C$$

گام دوم: حالا به سراغ محاسبهٔ اندازهٔ میدان الکتریکی حاصل از بار الکتریکی در فاصلهٔ $r_3 = 1\ m = 100\ cm$ از آن می‌رویم:

$$\frac{E_3}{E_2} = \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_3}{1/8 \times 10^4} = \left(\frac{10}{100}\right)^2$$

$$\Rightarrow E_3 = 1/8 \times 10^2 = 180\ N/C$$

۱۷۸- گزینهٔ ۴ گام اول: برایند نیروهای الکتریکی وارد بر بار q_3 صفر است پس نیروهایی که دو بار q_1 و q_2 به بار q_3 وارد می‌کنند هم‌اندازه است. بنابراین:

$$F_{23} = F_{13} \Rightarrow k\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = k\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2}$$

$$\xrightarrow{q_1 = -\frac{9}{4}q_2} \frac{|q_2|}{x^2} = \frac{\left|-\frac{9}{4}q_2\right|}{(x+r)^2} \Rightarrow \frac{(x+r)^2}{x^2} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x+r}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 2x + 2r \Rightarrow x = 2r \Rightarrow \frac{x}{r} = 2$$

گام دوم: بارهای q_2 و q_1 ناهمنام‌اند، پس یکدیگر را جذب می‌کنند. بنابراین q_3 باید q_1 را دفع کند تا برایند نیروهای الکتریکی وارد بر q_1 صفر شود. یعنی q_3 با q_1 همنام و در نتیجه با q_2 ناهمنام است.

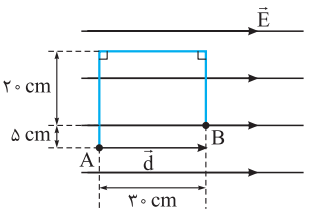
(یعنی گزینهٔ درست تست لو رفته است) از طرفی اندازهٔ نیروهایی که بارهای q_2 و q_3 به q_1 وارد می‌کنند باید برابر باشد. بنابراین:

$$F_{31}=F_{21} \Rightarrow k\frac{|q_3||q_1|}{r_{31}^2}=k\frac{|q_2||q_1|}{r_{21}^2}$$

$$\frac{|q_3|}{(x+r)^2}=\frac{|q_2|}{r^2} \xrightarrow{x=2r} \frac{|q_3|}{(3r)^2}=\frac{|q_2|}{r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{|q_3|}{|q_2|}=9 \xrightarrow{q_3 \text{ و } q_2 \text{ ناهمنام‌اند.}} \frac{q_3}{q_2}=-9$$

۱۷۹- گزینهٔ ۱ گام اول: اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار q در میدان الکتریکی یکنواخت به بزرگی E از رابطهٔ $|\Delta U|=E|q|d$ به دست می‌آید، که در این رابطه، d اندازهٔ جابه‌جایی ذره در راستای میدان است؛ بنابراین اندازهٔ تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی بار برابر است با:



$$|\vec{d}|=30\,cm=0/3\,m$$

$$|\Delta U|=E|q|d=10^5\times 5\times 10^{-6}\times 0/3=0/15\,J$$

گام دوم: با جابه‌جایی بار منفی در جهت میدان، انرژی پتانسیل الکتریکی آن افزایش می‌یابد. بنابراین $\Delta U=+0/15\,J$ است.

توجه

سایر فاصله‌های داده‌شده روی شکل اضافه است و نیازی به هیچ‌کدام از آن‌ها نیست.

۱۸۰- گزینهٔ ۱ گام اول: بار اولیهٔ خازن را برحسب میکروکولن Q_1 در نظر می‌گیریم. با انتقال بار $-6\,\mu C$ از صفحهٔ منفی به صفحهٔ مثبت، بار خازن به $Q_2=Q_1-6$ می‌رسد.

گام دوم: انرژی خازن در هر دو حالت را برحسب Q و C به دست می‌آوریم و اختلاف این دو انرژی را برابر $28/5\,\mu J$ قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$\begin{cases} U_1=\frac{Q_1^2}{2C}=\frac{Q_1^2}{2\times 12}=\frac{Q_1^2}{24}(\mu J) \\ U_2=\frac{Q_2^2}{2C}=\frac{(Q_1-6)^2}{2C}=\frac{(Q_1-6)^2}{24}(\mu J) \end{cases}$$

$$\Rightarrow U_1-U_2=28/5 \Rightarrow \frac{Q_1^2}{24}-\frac{(Q_1-6)^2}{24}=28/5$$

$$\frac{Q_1^2-(Q_1^2-12Q_1+36)}{24}=28/5\,\mu J$$

$$\Rightarrow \frac{12Q_1-36}{24}=28/5 \Rightarrow \frac{12(Q_1-3)}{24}=28/5$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1-3}{2}=28/5 \Rightarrow Q_1=60\,\mu C$$

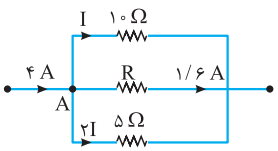
گام سوم: حالا از رابطهٔ $C=\frac{Q}{V}$، مقدار V_1 را به دست می‌آوریم:

$$C=\frac{Q_1}{V_1} \Rightarrow 12=\frac{60}{V_1} \Rightarrow V_1=5\,V$$

توجه

در رابطهٔ $U=\frac{Q^2}{2C}$، اگر Q و C را به ترتیب برحسب μC و μF قرار دهیم، U برحسب μJ به دست می‌آید.

۱۸۱- گزینهٔ ۳ **روش ۱** جریان عبوری از مقاومت $10\,\Omega$ را I در نظر می‌گیریم. چون دو مقاومت $10\,\Omega$ و $5\,\Omega$ موازی‌اند، نسبت جریان عبوری از آن‌ها به نسبت عکس مقاومت آن‌ها است. پس جریان عبوری از مقاومت $5\,\Omega$ برابر $2I$ خواهد بود. با توجه به گرهٔ A در مدار داریم:



$$4=I+1/6+2I \Rightarrow \begin{cases} I_{10\Omega}=I=0/8\,A \\ I_{5\Omega}=2I=1/6\,A \end{cases}$$

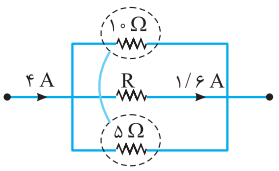
گام دوم: چون جریان عبوری از مقاومت $5\,\Omega$ با جریان عبوری از مقاومت R برابر است، مقدار مقاومت‌هایشان نیز برابر است.

پس $R=5\,\Omega$ است. حالا طبق رابطهٔ $U=RI^2t$ انرژی الکتریکی مصرفی در مقاومت R در مدت ۲۵ دقیقه را به دست می‌آوریم:

$$U=RI^2t=5\times(1/6)^2\times(25\times 60)=19200\,J=19/2\,kJ$$

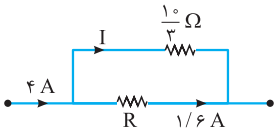
روش ۲

گام اول: ابتدا مدار را کمی ساده می‌کنیم. می‌توانیم دو مقاومت $5\,\Omega$ و $10\,\Omega$ را با هم موازی در نظر بگیریم و معادل آن‌ها را در مدار جای‌گذاری کنیم:



$$R_{5\Omega,10\Omega}=\frac{5\times 10}{5+10}=\frac{50}{15}=\frac{10}{3}\,\Omega$$

پس شکل ساده‌شدهٔ مدار به صورت مقابل خواهد بود:



گام دوم: با توجه به مدار ساده‌شده، جریان عبوری از مقاومت $\frac{10}{3}\,\Omega$ یعنی I برابر است با:

$$I=4-1/6=2/4\,A$$

گام سوم: ولتاژ دو سر دو مقاومت موازی $\frac{10}{3}\,\Omega$ و R با هم برابر است. پس:

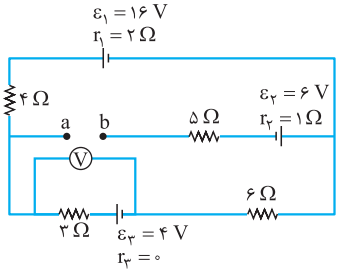
$$V_R=V_{\frac{10}{3}\Omega}=RI=\frac{10}{3}\times 2/4=8\,V$$

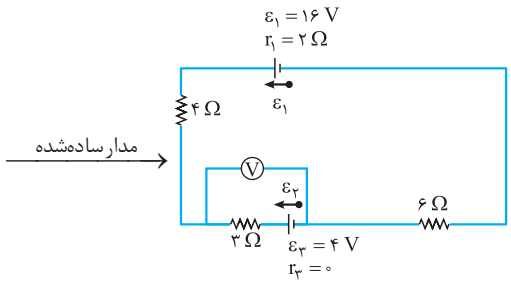
گام چهارم: انرژی الکتریکی مصرفی مقاومت R را از رابطهٔ $U=VIt$ به دست می‌آوریم:

$$U=VIt=8\times 1/6\times(25\times 60)=19200\,J=19/2\,kJ$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۸۲- گزینهٔ ۴ گام اول: در شاخهٔ وسط، نقاط ab به هم اتصال ندارند، هیچ جریانی از این شاخه عبور نمی‌کند و آن را از مدار حذف می‌کنیم.



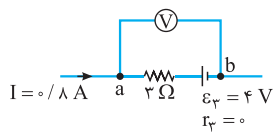


گام دوم: جریان مدار را با استفاده از رابطهٔ $I=\frac{\varepsilon_T}{R_{eq}+r_1+r_2}$ به دست می‌آوریم. با توجه به جهت پیکان نیروی محرکهٔ باتری‌ها، $\varepsilon_T=\varepsilon_1-\varepsilon_2$ است و جریان مدار برابر است با:

$$I=\frac{\varepsilon_T}{R_{eq}+r_1+r_2}=\frac{16-4}{4+3+6+2+0}=\frac{12}{15}=0/8\ A$$

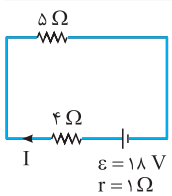
جهت جریان در مدار به صورت پادساعتگرد است.

گام سوم: از یک سر ولت‌سنج شروع به حرکت درون مدار می‌کنیم تا به سر دیگر آن برسیم. اختلاف پتانسیل به دست آمده بین دو سر ولت‌سنج همان عدد ولت‌سنج است.



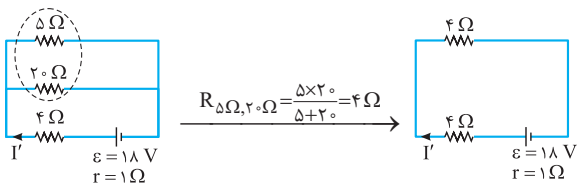
$$V_a-3I-\varepsilon_3=V_b \Rightarrow V_a-2/4-4=V_b$$
$$\Rightarrow V_a-V_b=6/4\ V \Rightarrow \text{عدد ولت‌سنج}=V=6/4\ V$$

۱۸۳- گزینهٔ ۳ گام اول: قبل از بستن کلید، جریان مدار و اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ Ω را به دست می‌آوریم. در این حالت مقاومت ۲۰ Ω در مدار قرار نمی‌گیرد.



$$I=\frac{\varepsilon}{R_{eq}+r}=\frac{18}{5+4+1}=1/8\ A$$
$$V_{5\Omega}=RI=5\times 1/8=9\ V$$

گام دوم: با بستن کلید، مقاومت ۲۰ Ω به مدار اضافه می‌شود. در این حالت جریان عبوری از باتری برابر است با:



$$R'_{eq}=4+4=8\ \Omega$$

$$I'=\frac{\varepsilon}{R'_{eq}+r}=\frac{18}{8+1}=2\ A$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ Ω همان اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت معادل ۴ Ω می‌باشد که برابر است با:

$$V_{5\Omega}=V_{4\Omega}=4I'=4\times 2=8\ V$$

بنابراین با بستن کلید اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت ۵ Ω به اندازهٔ $8-9=-1\ V$ تغییر کرده است. یعنی مقدار اختلاف پتانسیل دو سر این مقاومت ۱ ولت کاهش یافته است.

۱۸۴- گزینهٔ ۴ گام اول: چون $\frac{1}{4}$ سیم را نگه داشته‌ایم، حجم سیم باقی‌مانده با هر تغییری در ابعاد، $\frac{1}{4}$ حجم سیم اولیه خواهد بود. طبق گفتهٔ تست در نهایت طول سیم باقی‌مانده برابر طول سیم اولیه است و می‌دانیم که حجم آن $\frac{1}{4}$ حجم سیم اولیه است. بنابراین نسبت سطح مقطع سیم پس از دو تغییر متوالی به سطح مقطع اولیهٔ سیم برابر است با:

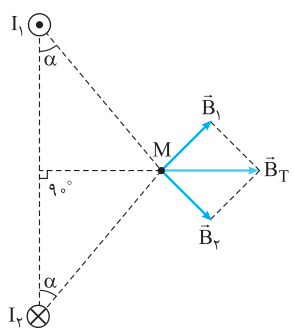
$$V_2=\frac{1}{4}V_1 \Rightarrow A_2L_2=\frac{1}{4}A_1L_1 \xrightarrow{L_1=L_2} A_2=\frac{1}{4}A_1$$

گام دوم: حالا با استفاده از رابطهٔ $R=\rho\frac{L}{A}$ به صورت نسبتی، مقاومت سیم پس از دو تغییر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\rho_2}{\rho_1}\times\frac{L_2}{L_1}\times\frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{R_2}{6}=1\times 1\times\frac{4}{1} \Rightarrow R_2=24\ \Omega$$

توجه کنید که رابطه را به صورت مستقیم بین مقاومت اولیه و مقاومت نهایی سیم نوشته‌ایم.

۱۸۵- گزینهٔ ۱ ابتدا با استفاده از قاعدهٔ دست راست، جهت میدان هر یک از سیم‌ها را در نقطهٔ M تعیین می‌کنیم و سپس برایند آن‌ها را رسم می‌کنیم. با توجه به شکل مقابل، بردار میدان مغناطیسی برایند در نقطهٔ M در جهت محور x است.



۱۸۶- گزینهٔ ۲ عین جملهٔ کتاب درسی است.

بد نیست بدانید، وسیله‌ای که جریان را فقط از یک‌سو عبور می‌دهد، دیود یا یکسوساز است، که انواع مختلفی از جمله LED دارد.

۱۸۷- گزینهٔ ۴ شار مغناطیسی از رابطهٔ $\Phi=BA\cos\theta$ به دست می‌آید که در این رابطه، θ زاویهٔ نیم‌خط عمود بر سطح با خطوط میدان است. در صورت سؤال زاویهٔ خطوط میدان با سطح حلقه داده شده است که متمم زاویهٔ θ است. پس θ و در نتیجه شار مغناطیسی برابر است با:

$$\theta=90-60=30^\circ$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

$$\Phi = BA\cos\theta = (۴\times۱۰^{-۳})\times(۲۰۰\times۱۰^{-۴})\times\cos۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \Phi = ۸\times۱۰^{-۵}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}\times۱۰^{-۵}\ \text{Wb}$$

۱۸۸- گزینهٔ ۳ گام اول: زمان داده‌شده روی نمودار برابر $\frac{۵T}{۴}$ است. پس T برابر است با:

$$\frac{۵T}{۴} = \frac{۱}{۳۲۰} \Rightarrow T = \frac{۱}{۴۰۰}\ \text{s}$$

گام دوم: معادلهٔ جریان متناوب را با استفاده از $I = I_m\sin(\frac{۲\pi}{T}t)$ می‌نویسیم:

$$I = ۵\sqrt{۲}\sin(\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۴۰۰}}t) = ۵\sqrt{۲}\sin(۸۰۰\pi t)$$

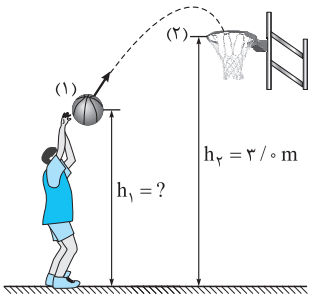
گام سوم: در معادله به جای t، لحظهٔ $\frac{۱}{۳۲۰۰}$ s را قرار می‌دهیم:

$$I = ۵\sqrt{۲}\sin(۸۰۰\pi t) \xrightarrow{t=\frac{۱}{۳۲۰۰}\text{s}} I = ۵\sqrt{۲}\sin(۸۰۰\pi\times\frac{۱}{۳۲۰۰})$$

$$\Rightarrow I = ۵\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴}) = ۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\ \text{A}$$

۱۸۹- گزینهٔ ۱ خطای آمپرسنج رقمی، مرتبهٔ آخرین رقم نشان داده شده توسط آن است. پس خطای آمپرسنج $\pm۰/۰۱$ A است و گزارش درست اندازه‌گیری به صورت $۳/۲۵ \pm ۰/۰۱$ A است.

۱۹۰- گزینهٔ ۱



از آن‌جا که مقاومت هوا ناچیز است، برای حل این تست از اصل پایستگی انرژی مکانیکی استفاده می‌کنیم. با توجه به بیان این موضوع، مطابق شکل برای نقاط (۱) و (۲) رابطهٔ پایستگی انرژی مکانیکی را می‌نویسیم:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \cancel{m}\,g h_۱ + \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۱^۲ = \cancel{m}gh_۲ + \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۲^۲$$

$$\Rightarrow ۱۰h_۱ + \underbrace{\frac{۱}{۲}\times۳۶}_{۱۸} = \underbrace{۱۰\times۳}_{۳۰} + \underbrace{\frac{۱}{۲}\times۲۵}_{۱۲/۵} \Rightarrow ۱۰h_۱ = ۲۴/۵$$

$$\Rightarrow h_۱ = ۲/۴۵\ \text{m}$$

تکنیک: اگر سطح مبدأ پتانسیل را محل پرتاب در نظر بگیریم، سریع‌تر به جواب می‌رسیم:

$$E_۱ = E_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۱^۲ = \cancel{m}g(\underbrace{h_۲ - h_۱}_{\Delta h}) + \frac{۱}{۲}\cancel{m}v_۲^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\times۳۶ = ۱۰\Delta h + \frac{۱}{۲}\times۲۵ \Rightarrow ۱۰\Delta h = ۵/۵$$

$$\Rightarrow \Delta h = ۰/۵۵\ \text{m}$$

بنابراین: $h_۱ = h_۲ - \Delta h = ۳ - ۰/۵۵ = ۲/۴۵$ m

۱۹۱- گزینهٔ ۲ گام اول: برای محاسبهٔ بازده پمپ، ابتدا توان خروجی آن را حساب می‌کنیم. (برای محاسبهٔ جرم آب از رابطهٔ چگالی $(m = \rho V)$ کمک می‌گیریم.)

$$P_۰ = \frac{E_۰}{t} = \frac{mgh}{t} = \frac{\rho Vgh}{t} = \frac{۱\times۱۰^۳\times۳\times۱۰\times۲۴}{۶۰}$$

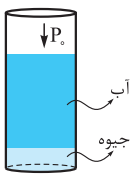
$$۱۲\times۱۰^۳\ \text{W} = ۱۲\ \text{kW}$$

گام دوم: حالا که توان خروجی را داریم، به راحتی بازده به دست می‌آید:

$$\text{Ra} = \frac{P_۰}{P_i}\times۱۰۰ = \frac{۱۲}{۲۰}\times۱۰۰ = ٪۶۰$$

۱۹۲- گزینهٔ ۴ مطابق اصل برنولی، با افزایش تندی، فشار کاهش می‌یابد؛ در این تست، با فوت‌کردن درون نی افقی، تندی هوای بالای نی قائم افزایش یافته و باعث **کم‌شدن فشار** هوای بالای نی قائم و در نتیجه فشار هوای درون آن می‌شود. در این حالت، هوا فشار کم‌تری در مقایسه با قبل به سطح آب داخل لوله وارد می‌کند؛ در نتیجه، سطح آب داخل لوله **بالا می‌آید**.

۱۹۳- گزینهٔ ۴ گام اول: مطابق شکل فشار ته لوله برابر است با: $P_{\text{کل}} = P_۰ + P_{\text{آب}} + P_{\text{جیوه}}$



گام دوم: از آن‌جایی که جرم آب و جیوه را داریم، بهتر است از رابطهٔ $P = \frac{F}{A}$ استفاده کنیم؛ یعنی:

$$P_{\text{کل}} = P_۰ + \frac{(m_{\text{آب}} + m_{\text{جیوه}})g}{A}$$

$$= ۱۳/۶\times۷۶\times۱۰۰ + \frac{۲۷۲\times۱۰^{-۳}\times۱۰}{۵\times۱۰^{-۴}}$$

$$= ۱۰۳۳۶۰ + ۵۴۴۰ = ۱۰۸۸۰۰\ \text{Pa}$$

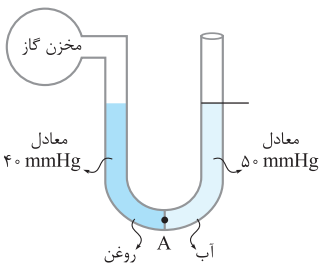
تکنیک: برای حل این تست نیازی به محاسبه نداشتیم، چرا که واضح است فشار در ته لوله حتماً از فشار هوا (حدود $۱۰^۵$ Pa) بیشتر است!

۱۹۴- گزینهٔ ۳ گام اول: از آن‌جا که فشار برحسب میلی‌متر جیوه خواسته شده، ابتدا فشار ناشی از روغن و آب را برحسب میلی‌متر جیوه حساب می‌کنیم:

$$P_{\text{آب(mmHg)}} = \frac{۱\times۶۸۰}{۱۳/۶} = ۵۰\ \text{mmHg}$$

$$P_{\text{روغن(mmHg)}} = \frac{۰/۸\times۶۸۰}{۱۳/۶} = ۴۰\ \text{mmHg}$$

گام دوم: حالا رابطهٔ فشار سمت راست و چپ را برای نقطهٔ A می‌نویسیم:



$$P_{\text{گاز}} + P_{\text{روغن}} = P_۰ + P_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P_{\text{گاز}} - P_۰}_{P_g\text{(فشار پیمانه‌ای)}} = P_{\text{آب}} - P_{\text{روغن}} = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰\ \text{mmHg}$$

در واقع اختلاف فشار مایع لولهٔ سمت راست و چپ، فشار پیمانه‌ای را نشان می‌دهد.

هواستون باشه! اگر فشار پیمانه‌ای را برحسب cmHg جای‌گذاری می‌کردید، به اشتباه به ۱ می‌رسیدید! ضمناً اگر جای آب و روغن با هم عوض می‌شه، فشار پیمانه‌ای -۱۰ mmHg می‌شه!

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۹۵- گزینهٔ ۴ گام اول: از رابطهٔ $Q = mc\Delta\theta$، نسبت $\frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B}$ را به دست می‌آوریم:

$$Q_A = Q_B \xrightarrow{m_A = m_B} m\, c_A \Delta\theta_A = m c_B \Delta\theta_B$$

$$c_A = \frac{1}{2} c_B \Rightarrow \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = 2$$

گام دوم: حالا با نوشتن رابطهٔ $\Delta V = V(3\alpha)\Delta\theta$، نسبت $\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B}$ را حساب می‌کنیم:

$$\frac{\Delta V_A}{\Delta V_B} = \frac{V_A}{V_B} \times \frac{\alpha_A}{\alpha_B} \times \frac{\Delta\theta_A}{\Delta\theta_B} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{4}$$

۱۹۶- گزینهٔ ۴ گام اول: قبل از هر چیز، یک طرحواره از این فرایند رسم می‌کنیم:

(۵۲۰−m) گرم یخ ۰°C $\xrightarrow[(520-m)L_F]{Q_1}$ ۵۲۰ g آب ۰°C $\xleftarrow[mc\Delta\theta]{Q_2}$ m گرم آب ۵۰°C

گام دوم: مطابق شکل، باید در نهایت ۵۲۰ g آب ۰°C داشته باشیم؛ بنابراین باید مجموع جرم آب و یخ آب‌شده بشود ۵۲۰ g؛ یعنی m گرم آب ۵۰°C داریم و (۵۲۰ − m) گرم یخ آب‌شده! بنابراین به کمک رابطهٔ تعادل گرمایی، جرم آب مورد نیاز را به دست می‌آوریم: $Q_1 = |Q_2| \Rightarrow (520-m)L_F = mc\Delta\theta$

$$\Rightarrow (520-m) \times 336 = m \times 4/2 \times 50$$

$$\Rightarrow 8 \times 520 - 8m = 5m \Rightarrow 13m = 8 \times 520$$

$$\Rightarrow m = \frac{8 \times 520}{13} = 320\ g$$

خواستون باشه! در این تست جرم یخ آب‌شده برایمان مهم است! نه جرم کل یخ!

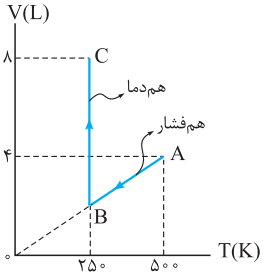
تکنیک: در محاسبات تعادل گرمایی فقط یکسان‌بودن واحدها مهم است؛ برای همین می‌توانیم به جای گرمای ویژهٔ آب مقدار $1\ \frac{cal}{g.^\circ C}$ و به جای گرمای نهان ذوب یخ مقدار $80\ \frac{cal}{g}$ را جای‌گذاری کنیم.

۱۹۷- گزینهٔ ۲ از آن‌جا که در فرایند اول فشار گاز تغییری نکرده، به آن کاری نداریم. مطابق گفتهٔ طراح، در فرایند دوم در دمای ثابت، حجم گاز ۲۰ درصد کم شده؛ یعنی:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2} \Rightarrow \frac{P_2}{2 \times 10^5} = \frac{V_1}{0/8 V_1}$$

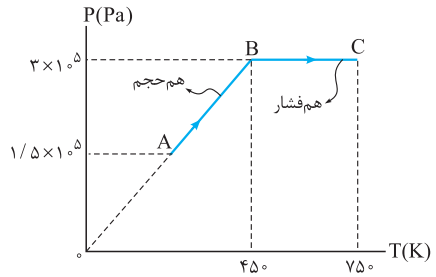
$$\Rightarrow P_2 = \frac{10}{8} \times 2 \times 10^5 = 2/5 \times 10^5\ Pa$$

۱۹۸- گزینهٔ ۳ گام اول: مطابق نمودار، فرایند AB، یک فرایند هم‌فشار است که در آن حجم کاهش یافته است! پس در نمودار P_V، باید فرایند AB یک خط افقی باشد که حجم در حال کاهش است. (رد ۱)



گام دوم: مطابق نمودار، فرایند BC، یک فرایند هم‌دما است که در آن حجم افزایش یافته (یعنی فشار کم شده)؛ بنابراین نمودار فرایند BC باید به صورت منحنی باشد، نه خط راست (رد ۴) همچنین در این فرایند باید $P_C V_C = P_B V_B$ باشد؛ این موضوع فقط در نمودار ۳ رعایت شده است!

۱۹۹- گزینهٔ ۲ گام اول: مطابق نمودار، فرایند AB یک فرایند هم‌حجم است؛ بنابراین کار انجام‌شده در این فرایند صفر است.



گام دوم: مطابق نمودار، فرایند BC، یک فرایند هم‌فشار است؛ برای همین، از رابطهٔ $Q = nc_P\Delta T$ برای گاز تک‌اتمی استفاده می‌کنیم:

$$Q = 1 \times \frac{5}{2} \times 8 \times (750-450) = 6000\ J$$

۲۰۰- گزینهٔ ۳ گام اول: ابتدا مقدار مول اولیهٔ گاز اکسیژن را از معادلهٔ حالت حساب می‌کنیم:

$$PV = nRT \Rightarrow n = \frac{PV}{RT} = \frac{5 \times 10^5 \times 30 \times 10^{-3}}{8 \times 300} = 6/25\ mol$$

گام دوم: از رابطهٔ $\frac{P_1V_1}{T_1n_1} = \frac{P_2V_2}{T_2n_2}$، مقدار مول اکسیژن خارج‌شده (Δn) را حساب می‌کنیم:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{P_1}{T_1n_1} = \frac{P_2}{T_2n_2} \Rightarrow \frac{5 \times 10^5}{300\, n_1} = \frac{2/9 \times 10^5}{290 \times n_2}$$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{6}{10} n_1 \Rightarrow \Delta n = \frac{4}{10} n_1 = \frac{4}{10} \times 6/25$$

$$\Rightarrow \Delta n = 2/5\ mol$$

گام سوم: حالا ببینیم ۲/۵ مول گاز اکسیژن، چند گرم است:

$$\Delta m = M\Delta n = 32 \times 2/5 = 80\ g$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

شیمی

۲۰۱- گزینهٔ ۲ عبارت‌های اول و دوم درست‌اند.

$^{1}_{1}H$ دارای یک پروتون و یک الکترون است و جرم آن حدود ۱/۰۰۸ amu است.

عنصرهایی با عدد اتمی ۱۷ و ۳۵ هر دو در گروه ۱۷ قرار دارند، زیرا عدد اتمی آن‌ها یک واحد کم‌تر از گازهای نجیب $_{18}Ar$ و $_{36}Kr$ (عنصرهای گروه ۱۸) است (*اگه شک دارین، می‌تونید* از آرایش الکترونی استفاده کنید). از طرفی عنصرهای $_{35}X$ و $_{21}Y$ هر دو در دورهٔ چهارم قرار دارند (عنصرهایی با عددهای اتمی ۱۹ تا ۳۶ در دورهٔ چهارم قرار دارند).

در دورهٔ سوم، نماد شیمیایی ۶ عنصر (Na, Mg, Al, Si, Cl, Ar) دوحرفی است.

خواص فیزیکی عنصرهای هم‌گروه که یکسان نیست. *تازه* خواص شیمیایی عناصر هم‌گروه، مشابه هم است نه یکسان!

۲۰۲- گزینهٔ ۱ آرایش الکترونی کروم به صورت $[_{18}Ar]\,3d^{5}4s^{1}$ است. در این اتم، یک الکترون موجود در زیرلایهٔ 4s دارای $n+l$ برابر ۴ (۴ = ۰ + ۴) و ۵ الکترون موجود در زیرلایهٔ 3d دارای $n+l$ برابر ۵ (۵ = ۲ + ۳) هستند.

$$3d^{\overset{b}{\uparrow}5}_{\downarrow x=5}\quad 4s^{1\to a}_{\downarrow m=4}$$

۲۰۳- گزینهٔ ۱ عدد اتمی و در نتیجه شمار پروتون‌های M^{2+} را برابر Z در نظر می‌گیریم.

$$_{Z}^{72}M^{2+}: Z = 0/8(72-Z) \Rightarrow 1/8Z = 72\times 0/8$$

$$\Rightarrow Z = \frac{72\times 0/8}{1/8} = \frac{\overset{4}{\cancel{72}}\times 8}{\cancel{18}} = 32$$

عنصری با عدد اتمی ۳۲ مانند عنصری با عدد اتمی ۳۶ در دورهٔ چهارم قرار دارد.

$$_{32}M: [_{18}Ar]\,3d^{10}4s^{2}4p^{2} \Rightarrow {}_{32}M^{2+}: [_{18}Ar]\,3d^{10}4s^{2}$$

در این یون، ۳ لایه از الکترون پر شده است. *هواستون باشه اگه گفته بود چند لایه اشغال شده، باید می‌گفتیم ۴ تا!*

۲۰۴- گزینهٔ ۲ ابتدا معادلهٔ واکنش‌ها:

$$4Al + 3O_2 \rightarrow 2Al_2O_3$$

بار کاتیون × تعداد کاتیون = تعداد الکترون‌های مبادله‌شده

$= 4\times 3 = 12$

به ازای مبادلهٔ ۱۲ مول الکترون، ۲ مول Al_2O_3 تولید می‌شود.

$$2Al + 3F_2 \rightarrow 2AlF_3$$

تعداد الکترون‌های مبادله‌شده $= 2\times 3 = 6$

به ازای مبادلهٔ ۶ مول الکترون، ۲ مول AlF_3 تولید می‌شود.

در این‌جا چون نسبت جرم AlF_3 به Al_2O_3 از ما خواسته شده، *می‌تونیم* $3/01\times 10^{24}$ *رو اصلاً وارد محاسبات نکنیم* و آن را a در نظر بگیریم:

$$\frac{\text{جرم } AlF_3}{\text{جرم } Al_2O_3} = \frac{a\,mole^{-}\times\frac{2\,mol\,AlF_3}{6\,mole^{-}}\times\frac{84\,g\,AlF_3}{1\,mol\,AlF_3}}{a\,mole^{-}\times\frac{2\,mol\,Al_2O_3}{12\,mole^{-}}\times\frac{102\,g\,Al_2O_3}{1\,mol\,Al_2O_3}}$$

$$= \frac{84\times\overset{1}{\cancel{14}}}{\underset{1}{\cancel{6}}\times\underset{51}{\cancel{102}}} = \frac{84}{51} = \frac{28}{17} \simeq 1/65$$

۲۰۵- گزینهٔ ۴ با توجه به فرمول داده‌شده، نماد کاتیون X به صورت X^{2+} است. با توجه به فرمول یون‌های سولفید (S^{2-}) و نیترید (N^{3-})، فرمول شیمیایی سولفید و نیترید X به صورت XS و X_3N_2 است. در ضمن با توجه به این‌که X کاتیون دو بار مثبت تشکیل داده، می‌تواند متعلق به گروه دوم جدول دوره‌ای باشد.

۲۰۶- گزینهٔ ۳ بیایید اول شمار مول‌های گاز بوتن (C_4H_8) را *بسنجیم!*

$$\text{جرم مولی } C_4H_8 = 4(12) + 8(1) = 56\ g.mol^{-1}$$

$$11/2\,g\,C_4H_8\times\frac{1\,mol\,C_4H_8}{56\,g\,C_4H_8} = 0/2\,mol\,C_4H_8$$

حالا بریم سراغ مقایسهٔ شمار اتم‌های سازندهٔ گازهای اکسیژن و بوتن:

$$0/24\,mol\,O_2\times\frac{2\,mol\,atom}{1\,mol\,O_2}\times\frac{N_A\,atom}{1\,mol\,atom}$$

$$= 0/48\,N_A\,atom$$

$$0/2\,mol\,C_4H_8\times\frac{12\,mol\,atom}{1\,mol\,C_4H_8}\times\frac{N_A\,atom}{1\,mol\,atom}$$

$$= 0/24\,N_A\,atom$$

شمار اتم‌های سازندهٔ مولکول‌های گاز در ظرف حاوی بوتن، نصف شمار آن‌ها در ظرف حاوی گاز اکسیژن است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) *درسته* ـ زیرا مول گاز در ظرف I (O_2) بیشتر از مول گاز در ظرف II (C_4H_8) است.

۲) با توجه به معادلهٔ موازنه‌شدهٔ واکنش، برای این‌که ۰/۲ مول گاز بوتن به طور کامل مصرف شود، به $0/2\times 6 = 1/2$ مول گاز اکسیژن نیاز است، در حالی که ما فقط ۰/۲۴ مول گاز اکسیژن داریم!

$$C_4H_8 + 6O_2 \rightarrow 4CO_2 + 4H_2O$$

۴) اگر در دما و فشار یکسان، مول دو یا چند گاز با هم برابر باشد، حجم آن‌ها نیز با هم برابر خواهد بود.

جمع مول‌های O_2 و $C_4H_8 = 0/2 + 0/24 = 0/44$

$$\text{مول CO: } 12/32\,g\,CO\times\frac{1\,mol\,CO}{28\,g\,CO} = 0/44\,mol\,CO$$

۲۰۷- گزینهٔ ۲ اول باید واکنش را موازنه کنیم:

روش ۱ به منظور موازنهٔ اتم‌های ید، ضریب I_2 را برابر ۱ و ضریب HIO_3 را برابر ۲ در نظر می‌گیریم و برای بقیهٔ ترکیب‌ها از ضرایب مجهول استفاده می‌کنیم. با توجه به موازنهٔ اتم نیتروژن، ضرایب HNO_3 و NO_2 را یکسان و برابر a و ضریب H_2O را b فرض می‌کنیم.

$$۱\,I_۲ + a\,HNO_۳ \rightarrow ۲\,HIO_۳ + a\,NO_۲ + b\,H_۲O$$

$$\text{موازنهٔ H: } a = ۲ + ۲b \Rightarrow a - ۲b = ۲$$

$$\text{موازنهٔ O: } ۳a = ۶ + ۲a + b \Rightarrow a - b = ۶ \Rightarrow \begin{matrix} a = ۱۰ \\ b = ۴ \end{matrix}$$

روش ۲ به روش اکسایش ـ کاهش واکنش را موازنه می‌کنیم. عدد اکسایش ید از صفر در $I_۲$ به ۵+ در $HIO_۳$ رسیده است. با توجه به این‌که در سمت چپ دو اتم ید داریم، تغییر عدد اکسایش آن را در ۲ ضرب کرده و ضریب $HNO_۳$ قرار می‌دهیم. عدد اکسایش N از ۵+ در $HNO_۳$ به ۴+ در $NO_۲$ رسیده یعنی ۱ واحد تغییر کرده است؛ پس ضریب $I_۲$ را برابر ۱ قرار می‌دهیم:

$$۱\,I_۲ + ۱۰\,HNO_۳ \rightarrow _\,HIO_۳ + _\,NO_۲ + _\,H_۲O$$

به منظور موازنهٔ ید، ضریب $HIO_۳$ باید برابر با ۲ و به منظور موازنهٔ نیتروژن، ضریب $NO_۲$ باید برابر با ۱۰ باشد. در آخر به کمک موازنهٔ هیدروژن یا اکسیژن، ضریب $H_۲O$ باید ۴ باشد.

خلاصه این‌که معادلهٔ موازنه‌شده *این‌طوری‌است*:

$$I_۲ + ۱۰HNO_۳ \rightarrow ۲HIO_۳ + ۱۰NO_۲ + ۴H_۲O$$

بریم سراغ حل قسمت اول سؤال:

$$۰/۲\,mol\,NO_۲ \times \frac{۱\,mol\,I_۲}{۱۰\,mol\,NO_۲} \times \frac{۲۵۴\,g\,I_۲}{۱\,mol\,I_۲} = ۵/۰۸\,g\,I_۲$$

برای قسمت دوم، چون صحبت از لیتر و ppm شده و چگالی را هم *نداده*، ppm را معادل میلی‌گرم حل‌شونده بر لیتر محلول در نظر می‌گیریم.

$$\text{جرم } HNO_۳ = ۰/۲\,mol\,NO_۲ \times \frac{۱۰\,mol\,HNO_۳}{۱۰\,mol\,NO_۲}$$

$$\times \frac{۶۳\,g\,HNO_۳}{۱\,mol\,HNO_۳} = ۱۲/۶\,g\,HNO_۳$$

$$ppm = \frac{\text{میلی‌گرم حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}} \Rightarrow ۵۰۰۰ = \frac{۱۲/۶ \times ۱۰۰۰}{V}$$

$$\Rightarrow V = \frac{۱۲/۶ \times ۱۰۰۰}{۵۰۰۰} = \frac{۱۲/۶}{۵} = ۲/۵۲\,L$$

۲۰۸- گزینهٔ ۱

$$BaCl_۲(aq) + Na_۲SO_۴(aq) \rightarrow BaSO_۴(s) + ۲NaCl(aq)$$

در ۲۰۰ گرم محلول ۱۰ درصد جرمی سدیم سولفات، ۲۰ گرم $\left(۲۰۰ \times \frac{۱۰}{۱۰۰} = ۲۰\right)$ سدیم سولفات وجود دارد.

$$\text{جرم مولی } Na_۲SO_۴ = ۲(۲۳) + ۳۲ + ۴(۱۶) = ۱۴۲\,g.mol^{-۱}$$

$$\text{جرم مولی } BaSO_۴ = ۱۳۷ + ۳۲ + ۶۴ = ۲۳۳\,g.mol^{-۱}$$

$$۲۰\,g\,Na_۲SO_۴ \times \frac{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}{۱۴۲\,g\,Na_۲SO_۴} \times \frac{۱\,mol\,BaSO_۴}{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}$$

$$\times \frac{۲۳۳\,g\,BaSO_۴}{۱\,mol\,BaSO_۴} = \frac{۲۰ \times ۲۳۳}{۱۴۲} = \frac{۲۳۳۰}{۷۱} \simeq ۳۲/۸\,g\,BaSO_۴$$

بررسی سایر گزینه‌ها: **۲** فراوردهٔ محلول در آب، همان NaCl است:

$$۲۰\,g\,Na_۲SO_۴ \times \frac{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}{۱۴۲\,g\,Na_۲SO_۴} \times \frac{۲\,mol\,NaCl}{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}$$

$$= \frac{۲۰}{۷۱} \simeq ۰/۲۸\,mol\,NaCl$$

۳ *ماشالله هر گزینه واسه خودش یه سؤاله!*

$$۲۰\,g\,Na_۲SO_۴ \times \frac{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}{۱۴۲\,g\,Na_۲SO_۴} \times \frac{۱\,mol\,BaCl_۲}{۱\,mol\,Na_۲SO_۴}$$

$$\times \frac{۲\,mol\,Cl^-}{۱\,mol\,BaCl_۲} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,Cl^-}{۱\,mol\,Cl^-} = \frac{۲۰ \times ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۷۱}$$

$$\simeq ۱/۷ \times ۱۰^{۲۳}\,Cl^-$$

۴ یکی از فراورده‌ها ($BaSO_۴$) رسوب است و در آب حل نمی‌شود.

۲۰۹- گزینهٔ ۴ موادی که توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارند، نسبت به مولکول‌های مشابه، نقطهٔ جوش بالاتری دارند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ مقایسهٔ نقطهٔ جوش: $NH_۳ > AsH_۳ > PH_۳$

($NH_۳$: پیوند هیدروژنی؛ $AsH_۳$: جرم مولی بیشتر؛ $PH_۳$: جرم مولی کم‌تر)

۲ آب برخلاف استون ($CH_۳-\overset{\overset{O}{\|}}{C}-CH_۳$) توانایی برقراری پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود را دارد؛ از این‌رو نقطهٔ جوش بالاتری دارد.

۳ هر مولکول آب با مولکول‌های آب دیگر از طریق پیوند هیدروژنی رابطه *دارن نه پیوند اشتراکی!*

۲۱۰- گزینهٔ ۳ عبارت‌های اول تا سوم درست‌اند.

- هر چند این نکته به طور مستقیم در کتاب درسی *نیومده ولی یادش بگیرید.*
- برخی مواد آلی در آب (مانند استیک اسید) در آب به یون تبدیل می‌شوند و محلول آن‌ها رسانای جریان برق است.
- افزایش فشار، انحلال‌پذیری گازها را افزایش می‌دهد در حالی که انحلال‌پذیری گازها با دما، رابطهٔ وارونه دارد.
- نمودار انحلال‌پذیری لیتیم سولفات برحسب دما، نزولی است؛ بنابراین با کاهش دما، انحلال‌پذیری آن افزایش می‌یابد؛ در حالی که نمودار انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات صعودی است و برای افزایش انحلال‌پذیری آن در آب، باید دما را افزایش دهیم.

۲۱۱- گزینهٔ ۳ معادلهٔ واکنش مس با نیتریک اسید هم متأسفانه به روش وارسی موازنه نمی‌شود و باید از روش‌های دیگری مانند ضرایب استفاده کنیم. *این بار با شما! البته ما قبلاً در شیمی دهم این واکنش رو براتون موازنه کردیم!*

$$۴HNO_۳ + Cu \rightarrow Cu(NO_۳)_۲ + ۲NO_۲ + ۲H_۲O$$

$$۶۳۰\,g\,HNO_۳\,\text{ناخالص} \times \frac{۸۰\,g\,HNO_۳\,\text{خالص}}{۱۰۰\,g\,\text{ناخالص}}$$

$$\times \frac{۱\,mol\,HNO_۳}{۶۳\,g\,HNO_۳\,\text{خالص}} \times \frac{۱\,mol\,Cu(NO_۳)_۲}{۴\,mol\,HNO_۳}$$

$$= ۲\,mol\,Cu(NO_۳)_۲$$

با توجه به معادلهٔ واکنش، شمار مول‌های $NO_۲$ تولیدشده دو برابر شمار مول‌های $Cu(NO_۳)_۲$ تولید شده است؛ بنابراین در این واکنش، ۴ مول $NO_۲$ تولید می‌شود. با توجه به معادلهٔ تولید اوزون، به ازای مصرف ۴ مول $NO_۲$، ۴ مول گاز اوزون تولید می‌شود:

$$۴\,mol\,O_۳ \times \frac{۲۲/۴\,L\,O_۳}{۱\,mol\,O_۳} = ۸۹/۶\,L\,O_۳$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۲۱۲- گزینهٔ ۱ معنی رابطهٔ داده‌شده *اینه که* چند ترکیب در آب محلول هستند. از بین ترکیبات داده‌شده، فقط منیزیم کلرید و لیتیم سولفات این *افتخار* رو دارند.

موارد (آ)، (ب) و (ث) رو در شیمی دهم و مورد (پ) رو در شیمی یازدهم باهاش آشنا شدیم!

۲۱۳- گزینهٔ ۳ به ثانیه و ساعت در این سؤال خیلی دقت کنید.

اول مقدار اتانول تولیدی در هر ثانیه را حساب می‌کنیم:

روش ۱ استفاده از کسر تبدیل:

$$۱۴۰۰\,g\,C_۲H_۴ \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۴}{۲۸\,g\,C_۲H_۴} \times \frac{۱\,mol\,C_۲H_۵OH}{۱\,mol\,C_۲H_۴} \times \frac{۴۶\,g\,C_۲H_۵OH}{۱\,mol\,C_۲H_۵OH} \times \frac{۱\,ton\,C_۲H_۵OH}{۱۰^۶\,g\,C_۲H_۵OH} \times \underbrace{\frac{۸۰\,ton\,C_۲H_۵OH\,\text{عملی}}{۱۰۰\,ton\,C_۲H_۵OH\,\text{نظری}}}_{\text{بازده واکنش}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۱۴۰۰}} \times ۴۶ \times ۸۰}{\underset{۱}{\cancel{۲۸}} \times ۱۰^۶ \times \underset{۲}{\cancel{۱۰۰}}}$$

$$= ۴۰ \times ۴۶ \times ۱۰^{-۶} = ۱۸۴ \times ۱۰^{-۵}\ ton\,C_۲H_۵OH$$

روش ۲ استفاده از کسر تناسب: در این روش، بازده درصدی در کسر مربوط به واکنش‌دهنده ضرب می‌شود.

$$\underbrace{\frac{\text{جرم} \times \frac{\text{بازده درصدی}}{۱۰۰}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{C_۲H_۴} = \underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}}}_{C_۲H_۵OH}$$

$$\frac{\overset{۵۰}{\cancel{۱۴۰۰}} \times \frac{۸۰}{۱۰۰}}{۱ \times \underset{۱}{\cancel{۲۸}}} = \frac{x}{۱ \times ۴۶} \Rightarrow x = ۴۰ \times ۴۶\ g$$

$$= ۴۰ \times ۴۶ \times ۱۰^{-۶}\ ton = ۱۸۴ \times ۱۰^{-۵}\ ton$$

خب! این مقدار برای یک ثانیه بود؛ پس جرم اتانول تولیدشده در هر ساعت که معادل ۳۶۰۰ ثانیه ($۶۰ \times ۶۰ = ۳۶۰۰$) است، برابر است با:

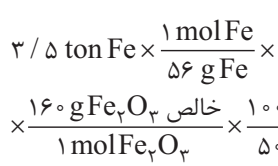
$$۳۶۰۰ \times ۱۸۴ \times ۱۰^{-۵} = ۳۶ \times ۱۸۴ \times ۱۰^{-۳} = ۶/۶۲۴\ ton$$

۲۱۴- گزینهٔ ۴ با توجه به این‌که اولین عضو خانوادهٔ آلکین‌ها ($C_۲H_۲$)، دو اتم کربن دارد، ششمین عضو آن‌ها دارای ۷ اتم کربن است و فرمول مولکولی آن $C_۷H_{۱۲}$ می‌باشد. از طرفی ششمین عضو خانوادهٔ آلکان‌ها، $C_۶H_{۱۴}$ است:

$$\text{جرم مولی } C_۷H_{۱۲} - \text{جرم مولی } C_۶H_{۱۴} = \text{جرم مولی } C - \text{جرم ۲ مول } H = ۱۲ - ۲ = ۱۰\ g$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱

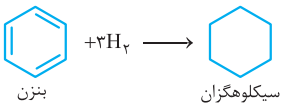


۳-اتیل پنتان

هپتان هم مانند ترکیب داده‌شده، یک آلکان ۷ کربنی است؛ پس این دو ترکیب، ایزومر یا هم‌پارند.

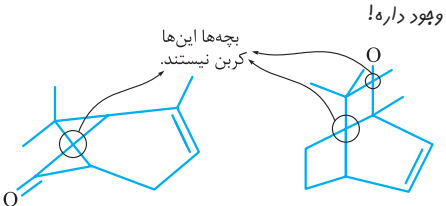
۲ سیکلوآلکان‌ها با آلکن‌های هم‌کربن خود، ایزومرند و فرمول مولکولی آن‌ها $C_nH_{۲n}$ است. در این ترکیب‌ها، شمار اتم‌های کربن، نصف شمار اتم‌های هیدروژن است.

۳



۲۱۵- گزینهٔ ۴ *واقعاً طرح این سؤال برای بچه‌های کنکوری ته نامردیه!*

طراح محترم! این‌گونه ساختارهای فضایی رو بچه‌ها نمی‌فون و فکر می‌کنن در تقاطع دوخط یک اتم کربن وجود داره!



با نوشتن فرمول ترکیب‌ها، گزینه‌های **۱** و **۳** سریع *رد می‌شن!* اما برای دو گزینهٔ دیگر باید *مساب‌کتاب* کنیم:

۲ ترکیب (II) دارای یک پیوند دوگانهٔ کربن ـ کربن است؛ در نتیجه هر مول از آن با ۱ مول برم به طور کامل واکنش می‌دهد:

$$\text{جرم مولی } C_۱۰H_{۱۶}O = (۱۰ \times ۱۲) + (۱۶ \times ۱) + ۱۶ = ۱۵۲\ g.mol^{-۱}$$

$$۳/۸\,g\,C_۱۰H_{۱۶}O \times \frac{۱\,mol\,C_۱۰H_{۱۶}O}{۱۵۲\,g\,C_۱۰H_{۱۶}O} \times \frac{۱\,mol\,Br_۲}{۱\,mol\,C_۱۰H_{۱۶}O} \times \frac{۱۶۰\,g\,Br_۲}{۱\,mol\,Br_۲} = ۴\,g\,Br_۲$$

۴

$$\text{جرم مولی } C_۱۰H_{۱۴}O = (۱۰ \times ۱۲) + (۱۴ \times ۱) + ۱۶ = ۱۵۰\ g.mol^{-۱}$$

$$C_۱۰H_{۱۴}O + ۱۳O_۲ \rightarrow ۱۰CO_۲ + ۷H_۲O$$

$$۷/۵\,g\,C_۱۰H_{۱۴}O \times \frac{۱\,mol\,C_۱۰H_{۱۴}O}{۱۵۰\,g\,C_۱۰H_{۱۴}O} \times \frac{۱۳\,mol\,O_۲}{۱\,mol\,C_۱۰H_{۱۴}O} \times \frac{۲۲/۴\,L\,O_۲}{۱\,mol\,O_۲} = ۱۴/۵۶\,L\,O_۲$$

۲۱۶- گزینهٔ ۳ $Fe_۲O_۳ + ۳CO \rightarrow ۲Fe + ۳CO_۲$

روش ۱ استفاده از کسر تبدیل: ابتدا باید به کمک جرم عملی آهن و بازده درصدی، مقدار نظری آن را به دست آوریم:

$$\text{بازده‌درصدی} = \frac{\text{مقدار عملی}}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۸۰ = \frac{۲/۸}{\text{مقدار نظری}} \times ۱۰۰$$

$$\Rightarrow \text{مقدار نظری Fe} = \frac{۲/۸ \times ۱۰۰}{۸۰} = ۳/۵\ ton$$

$$۳/۵\ ton\,Fe \times \frac{۱\,mol\,Fe}{۵۶\,g\,Fe} \times \frac{۱\,mol\,Fe_۲O_۳}{۲\,mol\,Fe} \times \frac{۱۶۰\,g\,Fe_۲O_۳\,\text{خالص}}{۱\,mol\,Fe_۲O_۳} \times \frac{۱۰۰\,g\,Fe_۲O_۳\,\text{ناخالص}}{۵۰\,g\,Fe_۲O_۳\,\text{خالص}} = \frac{۳/۵ \times ۱۶۰}{۵۶}$$

$$= \frac{۷ \times ۱۶۰}{۲ \times ۵۶} = ۱۰\ ton\,Fe_۲O_۳\,\text{ناخالص}$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

روش ۲ استفاده از کسر تناسب:

$$\underbrace{\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Fe} = \underbrace{\frac{\text{جرم ناخالص}\times\frac{\text{درصد خلوص}}{100}\times\frac{\text{بازده درصدی}}{100}}{\text{جرم مولی}\times\text{ضریب}}}_{Fe_2O_3}$$

$$\frac{x\times\frac{50}{100}\times\frac{80}{100}}{1\times160} = \frac{2/8}{2\times56} \Rightarrow x = 10\ \text{ton}\ Fe_2O_3 \text{ ناخالص}$$

برای محاسبهٔ گاز CO_2 تولیدشده، می‌توان از مقدار عملی آهن استفاده کنیم. *هواستون باشه که* وقتی از مقدار عملی یک فراورده برای به دست آوردن مقدار فراوردهٔ دیگر استفاده می‌کنیم، دیگر نباید بازده درصدی را در محاسبات وارد کنیم:

$$2/8\times10^6\ g\,Fe\times\frac{1\ mol\,Fe}{56\ g\,Fe}\times\frac{3\ mol\,CO_2}{2\ mol\,Fe}$$

$$= 75000\ mol\,CO_2$$

مطابق واکنش $CaO + CO_2 \rightarrow CaCO_3$، 75000 مول CO_2 با 75000 مول کلسیم اکسید واکنش می‌دهد:

$$75000\ mol\,CaO\times\frac{56\ g\,CaO}{1\ mol\,CaO}\times\frac{1\ kg\,CaO}{1000\ g\,CaO}$$

$$= 4200\ kg\,CaO$$

۲۱۷- گزینهٔ ۳ اول موازنهٔ واکنش‌ها:

$$I)\ CS_2 + 3O_2 \rightarrow CO_2 + 2SO_2$$

$$II)\ 4NH_3 + 3O_2 \rightarrow 2N_2 + 6H_2O$$

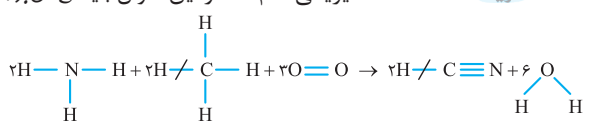
$$\underbrace{1\ g\,NH_3\times\frac{1\ mol\,NH_3}{17\ g\,NH_3}\times\frac{1530\ kJ}{4\ mol\,NH_3}}_{\text{گرمای سوختن آمونیاک}}$$

$$= \underbrace{x\ g\,CS_2\times\frac{1\ mol\,CS_2}{76\ g\,CS_2}\times\frac{1075\ kJ}{1\ mol\,CS_2}}_{\text{گرمای سوختن کربن دی‌سولفید}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1530\times76}{4\times17\times1075} = \frac{1710}{1075} \simeq 1/59\ g\,CS_2$$

با توجه به معادلهٔ (II)، شمار مول گاز تولیدشده ($N_2(g)$)، نصف شمار مول آمونیاک مصرف‌شده است؛ بنابراین سوختن هر مول آمونیاک، $0/5$ مول گاز تولید می‌کند.

۲۱۸- گزینهٔ ۳ حالت فیزیکی H_2O در این سؤال باید g می‌بود!



$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

$$\Delta H = [6\Delta H(N-H) + 6\Delta H(C-H) + 3\Delta H(O=O)] - [2\Delta H(C\equiv N) + 12\Delta H(O-H)]$$

$$\Rightarrow \Delta H = [(6\times390) + (6\times414) + (3\times495)]$$

$$-[(2\times880) + (12\times463)] = -1007\ kJ$$

آقای طراح واقعاً این همه محاسبات در سر جلسه مصیبته!

۲۱۹- گزینهٔ ۲ فرمول مولکولی بنزآلدهید C_7H_6O و فرمول مولکولی ترکیب داده‌شده، $C_{10}H_{18}O$ است.

$$C_7H_6O + 8O_2 \rightarrow 7CO_2 + 3H_2O$$
$$x\ mol$$

$$C_{10}H_{18}O + 14O_2 \rightarrow 10CO_2 + 9H_2O$$
$$y\ mol$$

آب: $3x + 9y = 7/8$

کربن دی‌اکسید: $7x + 10y = 9/4$

برای حل این دو معادله و به دست آوردن x، معادلهٔ اول را در -10 و معادلهٔ دوم را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} -30x - 90y = -78 \\ 63x + 90y = 84/6 \end{cases}$$

$$33x = 6/6 \Rightarrow x = 0/2\ mol \text{ (مول بنزآلدهید)}$$

$$\xrightarrow{\text{معادلهٔ اول}} (3\times0/2) + 9y = 7/8 \Rightarrow 9y = 7/2$$

$$\Rightarrow y = 0/8$$

$$\text{درصد مولی بنزآلدهید} = \frac{\text{مول بنزآلدهید}}{\text{مجموع مول دو ترکیب}}\times100$$

$$= \frac{x}{x+y}\times100 = \frac{0/2}{0/2+0/8}\times100 = \%20$$

۲۲۰- گزینهٔ ۴ در بین موارد گفته‌شده، حجم نقش کم‌تری را در سرعت انجام واکنش سوختن مواد دارد.

۲۲۱- گزینهٔ ۳ جرم CO_2 در هر زمان، از تفاوت جرم مخلوط اولیه با جرم مخلوط در آن زمان به دست می‌آید:

$$t = 30\ s: \text{جرم } CO_2 = 65/98 - 64/66 = 1/32\ g$$

$$\xrightarrow{\div44} 3\times10^{-2}\ mol$$

$$t = 40\ s: \text{جرم } CO_2 = 65/98 - 64/55 = 1/43\ g$$

$$\xrightarrow{\div44} 3/25\times10^{-2}\ mol$$

$$t = 50\ s: \text{جرم } CO_2 = 65/98 - 64/5 = 1/48\ g$$

$$\xrightarrow{\div44} 3/36\times10^{-2}\ mol$$

$$a = \Delta n(CO_2)\begin{cases} t=30 \\ t=20 \end{cases} = 3\times10^{-2} - 2/5\times10^{-2}$$

$$= 0/5\times10^{-2} = 5\times10^{-3}$$

$$c = \Delta n(CO_2)\begin{cases} t=50 \\ t=40 \end{cases} = 3/36\times10^{-2} - 3/25\times10^{-2}$$

$$= 1/1\times10^{-3}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1/1\times10^{-3}}{5\times10^{-3}} = 0/22$$

$$b = \bar{R}(CO_2)\begin{cases} t=40 \\ t=30 \end{cases} = \frac{\Delta n(CO_2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{(3/25\times10^{-2} - 3\times10^{-2})\ mol}{10\ s} = 2/5\times10^{-4}\ mol.s^{-1}$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۲۲۲- گزینهٔ ۴ عبارت‌های (آ)، (پ)، (ت) و (ث) درست‌اند.

بررسی عبارت نادرست:

ب) سهم بیشتر الیاف تولیدی در جهان مربوط به الیاف ساختگی است.

توجه

شاید خیلی‌هاتون در نگاه اول، عبارت (آ) رو به دلیل این‌که به جای پلی‌استیرن گفته استیرن، غلط بگیرید! اما سازمان سنجش این عبارت رو درست گرفته و چون پلی‌استیرن هم از استیرن تهیه می‌شه، در واقع مادهٔ اولیه برای تولید ظرف‌های یکبارمصرف را همون استیرن در نظر گرفته است! ولی خدایی این چه عبارتیه! کاش دوستان طراح، حداقل این‌گونه عبارت‌ها رو در سؤال‌های کدام درست یا نادرست بیاورند که بشه راحت‌تر در موردشون تصمیم گرفت!

۲۲۳- گزینهٔ ۱ ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار سدیم هیدروکسید شامل ۰/۰۵ مول $NaOH$ است (چرا؟) این مقدار $NaOH$ با ۴/۵۵ گرم از نمک CuA_2 واکنش کامل داده است. اگر جرم مولی نمک را a در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$0/05\,mol\,NaOH \times \frac{1\,mol\,CuA_2}{2\,mol\,NaOH} \times \frac{a\,g\,CuA_2}{1\,mol\,CuA_2}$$

$$= 4/55 \Rightarrow (\text{جرم مولی نمک})\ a \simeq 182\ g.mol^{-1}$$

$$\text{جرم مولی } CuA_2 = \text{جرم مولی } Cu + 2 \times \text{جرم مولی } A = 182$$

$$\Rightarrow \text{جرم مولی } A = \frac{182-64}{2} = 59$$

حالا باید ببینیم جرم مولی کدام یون از یون‌های استات (CH_3COO^-) یا نیترات (NO_3^-) برابر با ۵۹ است:

$$\text{جرم مولی } CH_3COO^- = 2(12)+3+2(16) = 59 \checkmark$$

$$\text{جرم مولی } NO_3^- = 14+3(16) = 62 \times$$

قسمت دوم هم که کاری نداره!

$$0/05\,mol\,NaOH \times \frac{1\,mol\,Cu(OH)_2}{2\,mol\,NaOH}$$

$$\times \frac{98\,g\,Cu(OH)_2}{1\,mol\,Cu(OH)_2} = 2/45\,g\,Cu(OH)_2$$

۲۲۴- گزینهٔ ۴ ویتامین C در آب حل می‌شود اما ویتامین K در آب نامحلول است؛ بنابراین جامد جمع‌شده روی کاغذ صافی همان ویتامین K است. $= 0/45\,g$ جرم ویتامین K

$= 1/05 - 0/45 = 0/6\,g$ جرم ویتامین C

ویتامین K دارای ۳۱ اتم کربن است؛ پس از سوختن کامل هر مول از آن ۳۱ مول CO_2 تولید می‌شود:

$$0/45\,g\,C_{31}H_{46}O_2 \times \frac{1\,mol\,C_{31}H_{46}O_2}{450\,g\,C_{31}H_{46}O_2}$$

$$\times \frac{31\,mol\,CO_2}{1\,mol\,C_{31}H_{46}O_2} = 0/031\,mol\,CO_2$$

۲۲۵- گزینهٔ ۱ برای محاسبهٔ جرم MOH خالص، ابتدا باید جرم آب تشکیل‌شده را به دست آوریم. آب تشکیل‌شده توانسته غلظت یک محلول را ۰/۲۵ $(\frac{1}{4})$ برابر کند، پس باید حجم این محلول ۴ برابر شده باشد؛ یعنی ۳ برابر حجم اولیهٔ محلول به آن آب اضافه شده است!

$$\underbrace{M_1V_1}_{\text{غلیظ}} = \underbrace{M_2V_2}_{\text{رقیق}} \Rightarrow M_1V_1 = \frac{1}{4}M_1V_2 \Rightarrow V_2 = 4V_1$$

$$\Rightarrow \text{حجم آب اضافه‌شده} = V_2 - V_1 = 3V_1$$

$$(\text{جرم آب})\,(g) = (\text{حجم آب})\,(mL) = 3 \times 4/8 = 14/4\,g$$

با توجه به معادلهٔ واکنش اسید چرب و MOH خواهیم داشت:

$$14/4\,g\,H_2O \times \frac{1\,mol\,H_2O}{18\,g\,H_2O} \times \frac{1\,mol\,MOH}{1\,mol\,H_2O}$$

$$\times \frac{40\,g\,MOH}{1\,mol\,MOH} = 32\,g\,MOH$$

$$\text{جرم کل } MOH \text{ خالص} = 75 \times \frac{67}{100} = 75 \times \frac{2}{3} \simeq 50\,g$$

$$\text{درصد } MOH \text{ خالص شرکت‌کرده} = \frac{32}{50} \times 100 = \%64$$

جرم باقی‌ماندهٔ MOH خالص برابر با $18 = 32 - 50$ گرم است. هر مول MOH با یک مول HCl خنثی می‌شود:

$$18\,g\,MOH \times \frac{1\,mol\,MOH}{40\,g\,MOH} \times \frac{1\,mol\,HCl}{1\,mol\,MOH}$$

$$= 0/45\,mol\,HCl$$

غلظت محلول HCl برحسب گرم بر لیتر خواسته شده است:

$$\frac{0/45\,mol \times \frac{36/5\,g\,HCl}{1\,mol\,HCl}}{0/5\,L} = 0/45 \times 73 = 32/85 \simeq 33\,g.L^{-1}$$

۲۲۶- گزینهٔ ۲ عبارت‌های (ب) و (ت) درست‌اند.

آ) *نه! کی گفته؟!* مثلاً NH_3 در ساختار خود یون هیدروکسید ندارد ولی با حل‌شدن در آب، غلظت یون هیدروکسید را افزایش داده و باز آرنیوس محسوب می‌شود.

ب) با توجه به تعریف اسید و باز آرنیوس، وجود آب برای این مدل *ضروریه!*

پ) ۰/۵ مول سولفوریک اسید (H_2SO_4) با ۱ مول سدیم هیدروکسید خنثی می‌شود.

$$\underbrace{n_a}_{\text{ظرفیت اسید}} . \underbrace{M_a.V_a}_{\text{مول اسید}} = \underbrace{n_b}_{\text{ظرفیت باز}} . \underbrace{M_b.V_b}_{\text{مول باز}}$$

$$\Rightarrow 2 \times 0/5 = 1 \times \text{مول } NaOH \Rightarrow \text{مول } NaOH = 1$$

ت) *درسته!* زیرا HNO_3 یک اسید قوی و HCN یک اسید ضعیف است.

۲۲۷- گزینهٔ ۱ *حواستون باشه که* غلظت محلول برحسب گرم بر لیتر داده شده که باید اول به مول بر لیتر تبدیل کنیم:

$$M = \frac{0/2\,g}{L} \times \frac{1\,mol}{20\,g} = 0/01\,mol.L^{-1}$$

$$[H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4/22} = 10^{-4} \times \underbrace{10^{-0/22}}_{0/6}$$

$$= 6 \times 10^{-5}\ mol.L^{-1}$$

$$K_a = \frac{[H^+]^2}{M-[H^+]} \simeq \frac{[H^+]^2}{M}$$

$$\Rightarrow K_a = \frac{6\times10^{-5} \times 6\times10^{-5}}{0/01} = \frac{36\times10^{-10}}{10^{-2}} = 3/6\times10^{-7}$$

$$\text{درصد یونش} = \frac{[H^+]}{M} \times 100 = \frac{6\times10^{-5}}{10^{-2}} \times 100 = 0/6$$

۲۲۸- گزینهٔ ۱ معادلهٔ موازنه‌شده به صورت زیر است:

$$3Ag + NO_3^- + 4H^+ \rightarrow 3Ag^+ + NO + 2H_2O$$

Ag در این واکنش اکسایش یافته و کاهنده است در حالی که NO_3^- کاهش یافته و اکسنده محسوب می‌شود. شمار الکترون‌های مبادله‌شده در این واکنش براساس معادلهٔ موازنه‌شده را می‌توان برحسب کاهنده یا اکسنده محاسبه کرد. این‌جا کاهنده *راحت‌تره!*

تعداد اتم کاهنده × ضریب کاهنده = شمار الکترون‌های مبادله‌شده

تغییر عدد اکسایش کاهنده × $= 3 \times 1 \times 1 = 3$

به ازای هر مول NO_3^-، ۳ مول الکترون مبادله می‌شود. $\Rightarrow$ ضریب NO_3^- برابر با یک است.

۲۲۹- گزینهٔ ۲ هر چه E° نیم‌واکنشی منفی‌تر باشد، گونهٔ سمت راست آن کاهندهٔ قوی‌تری است، بنابراین در این‌جا باید بگوییم قدرت کاهندگی Ce^{3+} از Cr بیشتر است.

یادآوری

اگر نیم‌واکنش‌ها را از E° بیشتر به E° کم‌تر مرتب کنیم، گونهٔ سمت راست پایین‌تر می‌تواند با گونهٔ سمت چپ بالاتر واکنش دهد.

$$3Ce^{3+} + Cr^{3+} \rightarrow 3Ce^{4+} + Cr$$

$$E^\circ(\text{واکنش}) = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند}) = -0/74 - (-1/72)$$

$$= 0/98\ V$$

۲۳۰- گزینهٔ ۳ *اول تحلیل هر واکنش:*

M در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از Hg قرار دارد :واکنش اول

Sn در سری الکتروشیمیایی بالاتر از M قرار دارد :واکنش دوم

M در سری الکتروشیمیایی بالاتر از Mg قرار دارد :واکنش سوم

Mn در سری الکتروشیمیایی پایین‌تر از M قرار دارد :واکنش چهارم

بنابراین ترتیب فلزها در سری الکتروشیمیایی *این‌چوریاست:*

	Hg	
E° آن باید بین $-0/14$	Sn	$\rightarrow -0/14\ V$
و $-1/18$ ولت باشد؛ $\leftarrow$	M	
پس می‌تواند $-0/4$ ولت باشد.	Mn	$\rightarrow -1/18\ V$
	Mg^{2+}	

۲۳۱- گزینهٔ ۲ عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند. بیایید همهٔ عبارت‌ها را بررسی کنیم:

- در فصل سوم شیمی دهم می‌خوانیم که گشتاور دوقطبی آب از هیدروژن سولفید (H_2S) بیشتر است. اتین (C_2H_2) هم که ناقطبی است و گشتاور دوقطبی کم‌تری از آب دارد.
- گسترهٔ دمایی مایع‌بودن NaCl بیشتر از HF است و در فناوری تولید برق از انرژی خورشیدی مناسب‌تر (به عنوان منبع ذخیرهٔ انرژی گرمایی) است.
- در SO_3، S بار جزئی مثبت و اتم‌های اکسیژن بار جزئی منفی دارند؛ زیرا خاصیت نافلزی گوگرد از اکسیژن کم‌تر است.
- هر چهار یون $_{11}Na^+$، $_9F^-$، $_{12}Mg^{2+}$ و $_8O^{2-}$ هم‌الکترون هستند. در یون‌های هم‌الکترون، آنیون با بار بیشتر، بیشترین شعاع یونی و کاتیون با بار بیشتر، کم‌ترین شعاع یونی را دارد.

۲۳۲- گزینهٔ ۱ *هرچی زور زدیم که برای این سؤال یه استدلال منطقی بیاریم و طراح این سؤال رو خوشحال کنیم، نشد که نشد! برادر من، آفه این چه سؤالیه! حتی اگر بچه‌ها ترتیب آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب‌ها رو در فصل ۳ کتاب دوازدهم می‌دونستن، باز هم نمی‌تونستن به این سؤال جواب بدن! تفاوت آنتالپی فروپاشی ترکیب‌های مختلف رو که کسی حفظ نمی‌کنه!*

در گزینه‌های ۳ و ۴، هم شعاع کاتیون و هم شعاع آنیون یک ترکیب از ترکیب دیگر بزرگ‌تر است و *می‌شه حدس زد* که تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکهٔ این ترکیب‌ها اختلاف زیادی با هم دارند. *اما گزینه‌های* ۱ و ۲ *رو چه کنیم که از هر لحاظ شرایطشون با هم یکیه؟!* فقط با حفظ‌بودن نمودار صفحهٔ ۸۰ کتاب درسی، می‌شد به این سؤال جواب داد.

۲۳۳- گزینهٔ ۲ عبارت‌های اول و چهارم درست‌اند. عبارت‌های اول و چهارم که *بررسی نمی‌خوان، بریم سراغ بقیهٔ عبارت‌ها:*

عبارت دوم: فقط الکترون‌های ظرفیت، دریای الکترونی را می‌سازند نه همهٔ الکترون‌های یک اتم!

عبارت سوم: عدد اکسایش که یک خاصیت شیمیایی است، ربطی به دریای الکترونی ندارد. از طرفی مثلاً فلزهای گروه دوم، ۲ الکترون ظرفیت دارند که در به وجود آمدن دریای الکترونی آن‌ها نقش دارد اما این عنصرها، فقط یک نوع عدد اکسایش در ترکیب‌هایشان دارند.

عبارت پنجم: در دریای الکترونی، الکترون‌ها آزادانه می‌توانند جابه‌جا شوند اما این‌جا گفته هستهٔ اتم‌ها ثابت هستند که این *درسته!* اما دقت کنید که براساس مدل دریای الکترونی، ساختار فلزها آرایش **منظمی** از **کاتیون‌ها** در سه بعد است که ...! یعنی ما با کاتیون سروکار داریم و نه هستهٔ اتم فلز!

۲۳۴- گزینهٔ ۴ عبارت‌های (ب) و (پ) درست‌اند.

$$2NO \rightarrow N_2 + O_2 + 180\ kJ$$

آ) به ازای مصرف ۰/۲۵ مول گاز NO، ۲۲/۵ کیلوژول گرما آزاد می‌شود:

$$0/25\ mol\ NO \times \frac{180\ kJ}{2\ mol\ NO} = \frac{180}{8} = 22/5\ kJ$$

ب) علامت ΔH در واکنش‌های گرماده، منفی است و سطح انرژی فراورده‌ها پایین‌تر از واکنش‌دهنده‌ها است.

پ) *مگه شک دارین؟!*

ت) تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و فراورده‌ها همان ΔH است که با به کار بردن کاتالیزگر هم تغییری *نمی‌کنه.*

۲۳۵- گزینهٔ ۴

مجموع مقدار آلاینده‌ها در نبود مبدل $= 6 + 1/66 + 1/03$

$= 8/69\ g$

مجموع مقدار آلاینده‌ها در مجاورت مبدل $= 0/6 + 0/06$

$+ 0/04 = 0/7\ g$

کاهش جرم آلاینده‌ها به ازای یک کیلومتر $= 8/69 - 0/7$

$= 7/99\ g$

$$8 \times 10^5 \text{ خودرو} \times \frac{50\ km}{1\ \text{خودرو}} \times \frac{7/99\ g}{1\ km} \times \frac{1\ ton}{10^6\ g}$$

$$\simeq 8 \times 5 \times 8 = 320\ ton$$

$$\text{درصد جرمی } CO = \frac{\text{جرم } CO}{\text{جرم کل آلاینده‌ها}} \times 100 = \frac{0/6}{0/7} \times 100$$

$$\simeq \%85/71$$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه