ریاضیات رشتهٔ ریاضی

۱۰۱- در یک کلاس ۳۹ نفری، ۱۶ نفر در گروه ورزش، ۱۲ نفر در گروه روزنامه‌دیواری و ۹ نفر فقط در گروه ورزش هستند. چند نفر آنان عضو هیچ‌یک از این دو گروه نیستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

۱۰۲- اگر $A = \sqrt[5]{4\sqrt[3]{16}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ کدام است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

۱۰۳- به ازای کدام مجموعه مقادیر m، معادلهٔ درجه‌دوم $(2m-1)x^2+6x+m-2=0$، دارای دو ریشهٔ حقیقی است؟

۱) $-2<m<2/5$ ۲) $-2<m<3/5$ ۳) $-1<m<3/5$ ۴) $-1<m<2/5$

۱۰۴- نمودار تابع $y=-x^2+2x+5$ را ۳ واحد به طرف xهای مثبت، سپس ۲ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

۱) $(3,4)$ ۲) $(2,5)$ ۳) $(3,5)$ ۴) $(2,6)$

۱۰۵- مجموع تمام اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۷، کدام است؟

۱) ۷۲۱ ۲) ۷۲۸ ۳) ۷۳۵ ۴) ۷۴۲

۱۰۶- بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۳ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

۱۰۷- اگر $f=\{(1,2),(2,5),(3,4),(4,6)\}$ و $g=\{(2,3),(4,2),(5,6),(3,1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{gof^{-1}}$ کدام است؟

۱) $\{(4,2),(5,2)\}$ ۲) $\{(4,2),(3,5)\}$ ۳) $\{(5,2),(2,4)\}$ ۴) $\{(3,5),(2,4)\}$

۱۰۸- نمودار یک تابع به صورت $f(x)=-2+\left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$، نمودار تابع $y=x^2-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع می‌کند. $f(3)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۱۰۹- حاصل عبارت $\tan\frac{11\pi}{4}+\sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$ کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

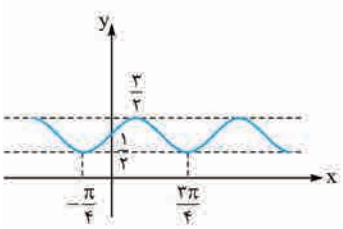
۱۱۰- حاصل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$ کدام است؟

۱) $-\sin a$ ۲) $-\cos a$ ۳) $\cos a$ ۴) $\sin a$

۱۱۱- به ازای کدام مقدار a، تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} & ;\ x>2\\ ax-1 & ;\ x\le 2\end{cases}$، بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۱۲- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y=1+a\sin bx\cos bx$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۲
۴) ۳

۱۱۳- مجموع جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x$، در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{5\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

۱۱۴- اگر $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-5}{x^2+ax+b}=-\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۱۱۵- اگر $g(x)=x+\sqrt{x}$ و $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

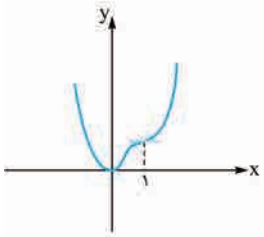
۱۱۶- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}|x^۲-۲x| & ; x<۲\\ \frac{۱}{۲}x^۲+ax+b & ; x\geq ۲\end{cases}$، در نقطهٔ $x=۲$ مشتق‌پذیر است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x=\frac{۳}{۴}$ چه‌قدر بیشتر است؟

۱) ۰/۱۰ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲۰ ۴) ۰/۲۵

۱۱۸- شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$ است. a کدام است؟



۱) -۸
۲) -۷
۳) -۵
۴) -۴

۱۱۹- فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع $f(x)=\frac{x^۲+۲x}{(x-۱)^۲}$، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۲۰- در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۲۱- در مثلث ABC نقطهٔ M وسط BC است. نیمسازهای دو زاویهٔ AMB و AMC دو ضلع مثلث را در P و Q قطع می‌کنند. نقطهٔ O محل تلاقی AM و PQ است. OM برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$BC ۲) AQ ۳) OA ۴) OP

۱۲۲- در چهارضلعی ABCD، وسط دو ضلع غیرمجاور و وسط دو قطر آن، رأس‌های یک لوزی است. الزاماً کدام نتیجه‌گیری در مورد چهارضلعی مفروض درست است؟

۱) دو ضلع غیرمجاور دیگر، برابرند.
۲) دو قطر عمود بر هم‌اند.
۳) دو ضلع شامل رأس‌های لوزی، برابرند.
۴) دو ضلع غیرمجاور، موازی‌اند.

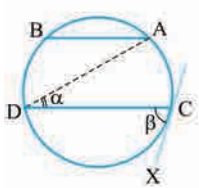
۱۲۳- نقطهٔ A، خط d و صفحهٔ P مفروض‌اند. در رسم صفحه‌ای گذرا از نقطهٔ A، موازی خط d و عمود بر صفحهٔ P، در کدام حالت تعداد جواب‌ها بی‌شمار است؟

۱) $d\cap P=d$ ۲) $d\cap P\neq\varnothing$ ۳) $d\parallel p$ ۴) $d\perp p$

۱۲۴- در یک مکعب، صفحهٔ گذرا بر یک یال و وسط یال دیگر، آن را به دو قطعهٔ نابرابر تقسیم می‌کند. نسبت حجم‌های این دو قطعه کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{\sqrt{۵}}$ ۴) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

۱۲۵- در شکل روبه‌رو، وتر AB برابر شعاع دایره و $AB\parallel CD$، زاویهٔ $\beta=۲\alpha$ و CX مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵

۱۲۶- یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با کدام شرط قابل محیط بر دایره است؟

۱) دو قطر عمود بر هم
۲) یکی از قاعده‌های ذوزنقه، برابر یکی از ساق‌ها
۳) خط واصل وسط دو ساق، گذرا از محل تلاقی قطرها
۴) طول پاره‌خط واصل وسط دو ساق، برابر اندازهٔ یکی از ساق‌ها

۱۲۷- اگر مساحت شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره $۶\sqrt{۳}$ باشد، آن‌گاه مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر این دایره، چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

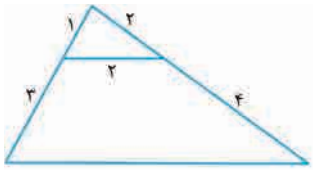
۱) ۷/۲ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۲۸- نقطهٔ A در صفحهٔ دو خط متقاطع d و d' است. در رسم مثلث متساوی‌الاضلاع به رأس A، که دو رأس دیگر آن بر روی هر یک از دو خط مفروض باشد، کدام تبدیل هندسی به کار می‌رود؟

۱) انتقال ۲) بازتاب ۳) تجانس ۴) دوران

کنکور سراسری ۹۸
www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۲۹- در شکل روبه‌رو، اندازهٔ ضلع بزرگ‌تر چهارضلعی کدام است؟



۱) $2\sqrt{10}$
۲) $2\sqrt{11}$
۳) $4\sqrt{3}$
۴) $5\sqrt{2}$

۱۳۰- از رابطهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & 2x & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix} = 0$، عدد غیرصفر x کدام است؟

۱) $\frac{2}{9}$
۲) $\frac{3}{8}$
۳) $\frac{4}{9}$
۴) $\frac{3}{5}$

۱۳۱- اگر $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$، از رابطهٔ ماتریسی $AX = A - 2I$، ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$

۱۳۲- اگر A ماتریس 3×3 باشد و $|A| = 4$، آن‌گاه دترمینان ماتریس $|A.A|$ کدام است؟

۱) ۶۴
۲) ۹۶
۳) ۱۲۸
۴) ۲۵۶

۱۳۳- وتر مشترک دایرهٔ C با دایره به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 4x = 6$ منطبق بر نیمساز ناحیهٔ اول است. اگر دایرهٔ C از نقطهٔ $(-1,4)$ بگذرد، معادلهٔ آن کدام است؟

۱) $x^2 + y^2 - y + 3x = 6$
۲) $x^2 + y^2 + 2y - x = 6$
۳) $x^2 + y^2 - 2y + x = 6$
۴) $x^2 + y^2 - 3y - x = 6$

۱۳۴- معادلهٔ یک سهمی با کانون $F(2,1)$ و خط هادی به معادلهٔ $x = 4$ کدام است؟

۱) $y^2 - 2y + 4x = 11$
۲) $y^2 - 2y + 2x = 5$
۳) $x^2 - 4x + 4y = 0$
۴) $x^2 - 6x + 2y = -5$

۱۳۵- در یک بیضی به اقطار $2\sqrt{5}$ و ۲ واحد، دایره‌ای هم‌مرکز با بیضی و شعاع ۲ واحد، بیضی را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مجموع مربعات فواصل M از دو کانون بیضی کدام است؟

۱) ۱۲
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

۱۳۶- به ازای کدام مقدار m، سه بردار $\vec{a} = (-1,2,3)$ و $\vec{b} = (2,0,1)$ و $\vec{c} = (-4,m,5)$ در یک صفحه‌اند؟

۱) -2
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۱۳۷- اگر $A = \{1,2,\{1,2\},\{1,\{1,2\}\},\{\{2\}\}\}$ و $B = \{\{1\},\{1,2\}\}$ باشند، تعداد زیرمجموعه‌های $A \cap B'$ کدام است؟

۱) ۴
۲) ۸
۳) ۱۶
۴) ۳۲

۱۳۸- در دو جعبه به ترتیب ۲۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اول ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از جعبهٔ اول ۵ لامپ و از جعبهٔ دوم ۷ لامپ، به تصادف برداشته و در جعبهٔ جدید قرار می‌دهیم. با کدام احتمال، یک لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید معیوب است؟

۱) $\frac{5}{24}$
۲) $\frac{11}{48}$
۳) $\frac{13}{48}$
۴) $\frac{7}{24}$

۱۳۹- در دو پیشامد مستقل A و B، اگر $P(A \cap B) = 0/6$ و $P(A \cap B') = 0/2$، آن‌گاه $P(A \cup B')$ کدام است؟

۱) $0/7$
۲) $0/75$
۳) $0/85$
۴) $0/9$

۱۴۰- نمرات ریاضی ۴۰ دانش‌آموز یک کلاس در جدول روبه‌رو آمده است. میانگین وزنی نمرات کدام است؟

x	۱۰	۱۲	۱۴	۱۵	۱۷	۱۸
f	۵	۸	۷	۱۰	۶	۴

۱) $14/2$
۲) $14/25$
۳) $14/4$
۴) $14/75$

۱۴۱- نرخ بیکاری یک کشور در ۱۰ سال گذشته به صورت زیر است. مقدار $\frac{Q_1 + Q_3 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1}$ کدام است؟

$$\boxed{12/7,30/2,10/6,11/9,10/6,12/3,11/2,13/5,12/8,11/5}$$

۱) $-0/225$
۲) $-0/125$
۳) $0/175$
۴) $0/275$

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۴۲- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی بر ۶ و ۱۱ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۶۶ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۴۱

۱۴۳- به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha \mid 13n+3$، $\alpha \mid 7n+4$ و $\alpha \neq 1$ باشد، آن‌گاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد n، کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

۱۴۴- قیمت هر واحد از دو نوع کالای متمایز به ترتیب ۲۲۰ و ۱۴۰ تومان است. با مبلغ ۱۹۰۰۰ تومان، به چند طریق می‌توان از این دو نوع کالا خریداری کرد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۴۵- اگر عدد $7^{13}+a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۴۶- یک گراف سادهٔ ۶ رأسی ۴ـ منتظم، دارای چند دور با طول ۴ است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۴۷- به چند طریق می‌توان ۱۱ توپ یکسان را بین ۵ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۲۲۰

۱۴۸- تعداد توابع پوشا، از یک مجموعهٔ ۶ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۴۵۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۵۴۰

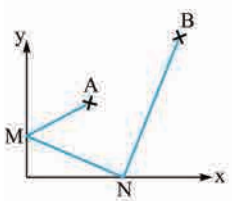
۱۴۹- از مجموعهٔ اعداد $\{5,8,11,\ldots,65,68,71\}$ که به صورت یک تصاعد عددی مرتب شده است، یک زیرمجموعهٔ حداقل چندعضوی انتخاب شود تا مطمئن باشیم لااقل دو عدد در این زیرمجموعه موجود است که جمع آن‌ها ۸۲ باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۱۵۰- به ازای کدام مجموعه مقادیر x، بازهٔ $(x+1, 2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ می‌باشد؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{2\}$ ۳) $2 < x < 2/5$ ۴) $1/5 < x < 2$

۱۵۱- نقاط $A\begin{vmatrix}3\\5\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}9\\11\end{vmatrix}$ در صفحهٔ محورهای مختصات مفروض‌اند. دو نقطهٔ M و N همواره روی دو محور می‌لغزند. کم‌ترین اندازهٔ خط شکستهٔ AMNB کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۱۹
۳) ۲۰
۴) ۲۱

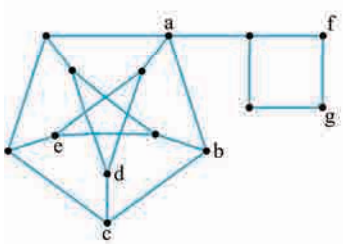
۱۵۲- گزارهٔ $\sim(p \Rightarrow q)$، با کدام گزارهٔ زیر هم‌ارزش است؟

۱) $\sim p \vee q$ ۲) $p \vee \sim q$ ۳) $\sim p \wedge q$ ۴) $p \wedge \sim q$

۱۵۳- گزارهٔ سوری $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}; P(x,y)$، با کدام گزاره‌نمای $P(x,y)$ دارای ارزش درست است؟

۱) $y - x = 6$ ۲) $x - y = 6$ ۳) $x + y = 6$ ۴) $xy = 6$

۱۵۴- کدام مجموعه برای گراف روبه‌رو، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است؟



۱) $\{a,c,e,g\}$
۲) $\{a,d,e,g\}$
۳) $\{a,b,d,e\}$
۴) $\{a,d,e,f\}$

۱۵۵- تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

کنکور سراسری ۹۸

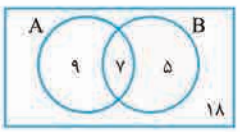
www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

ریاضیات رشتهٔ ریاضی

۱۰۱- گزینهٔ «۴» افرادی که در گروه ورزش هستند را با A و آن‌هایی که در گروه روزنامه‌نگاری‌اند را با B نشان می‌دهیم. ۹ نفر فقط در گروه ورزش‌اند، بنابراین $|A-B|=۹$. از طرفی و بنا به اطلاعات داده‌شده، $|A|=۱۶$، $|B|=۱۲$.

می‌خواهیم $|A'\cap B'|$ را به دست آوریم، داریم:

$$|A-B|=۹ \Rightarrow |A|-|A\cap B|=۹$$
$$\Rightarrow ۱۶-|A\cap B|=۹ \Rightarrow |A\cap B|=۷$$



$$|A'\cap B'| = \text{کل}-|A\cup B|$$
$$= \text{کل}-|A|-|B|+|A\cap B|$$
$$= ۳۹-۱۶-۱۲+۷=۱۸$$

۱۰۲- گزینهٔ «۲» با توجه به تساوی، طرفین را به توان ۱۵ می‌رسانیم:

$$A^{۱۵}=((\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}})(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}})^{۱۵}$$
$$\Rightarrow A^{۱۵}=(\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}})^{۱۵}((\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}})^{۱۵}$$
$$\Rightarrow A^{۱۵}=(۴\sqrt[۳]{۱۶})^{۳}(\frac{۱}{۲})^{-۲۰}$$
$$\Rightarrow A^{۱۵}=۴^{۳}\times ۱۶\times ۲^{۲۰}=(۲^{۲})^{۳}\times ۲^{۴}\times ۲^{۲۰}$$
$$\Rightarrow A^{۱۵}=۲^{۳۰} \Rightarrow A=۲^{۲}$$

بنابراین: $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}=(۲(۲^{۲}))^{-\frac{۱}{۳}}=(۲^{۳})^{-\frac{۱}{۳}}=۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}=۰/۵$

۱۰۳- گزینهٔ «۳» برای این‌که معادله دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد، باید $\Delta>۰$ باشد:

$$\Rightarrow ۳۶-۴(۲m-۱)(m-۲)>۰$$
$$\xrightarrow{\div(-۴)} (۲m-۱)(m-۲)-۹<۰$$
$$\Rightarrow ۲m^{۲}-۴m-m+۲-۹<۰ \Rightarrow ۲m^{۲}-۵m-۷<۰$$

در معادلهٔ $۲m^{۲}-۵m-۷=۰$ است. در نتیجه یکی از $a+c=b$ ،ریشه‌ها -۱ و ریشهٔ دیگر $-\frac{c}{a}=\frac{۷}{۲}=۳/۵$ است. در نتیجه:

$$۲m^{۲}-۵m-۷<۰ \Rightarrow -۱<m<۳/۵$$

۱۰۴- گزینهٔ «۱» اول انتقال‌ها را انجام می‌دهیم:

$$y=-x^{۲}+۲x+۵$$
$$\xrightarrow[x\to x-۳]{\text{۳ واحد به طرف } x\text{های مثبت}} y=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵$$
$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به طرف } y\text{های منفی}} y=-(x-۳)^{۲}+۲(x-۳)+۵-۲$$

حالا تابع را مرتب می‌کنیم:

$$y=-x^{۲}+۶x-۹+۲x-۶+۳ \Rightarrow y=-x^{۲}+۸x-۱۲$$

حالا بازه‌ای که نمودار تابع بالای نیمساز ربع اول $(y=x)$ قرار می‌گیرد را می‌یابیم. برای این کار باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$-x^{۲}+۸x-۱۲>x \Rightarrow x^{۲}-۷x+۱۲<۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۴)<۰ \Rightarrow ۳<x<۴$$

۱۰۵- گزینهٔ «۲» کوچک‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ برابر $۲(۷)=۱۴$ و بزرگ‌ترین عدد دورقمی مضرب ۷ برابر $۱۴(۷)=۹۸$ است و تعداد آن‌ها برابر $۱۳=۱+۲-۱۴$ تاست؛ بنابراین چون این اعداد تشکیل یک دنبالهٔ حسابی (با قدر نسبت ۷) می‌دهند، مجموع آن‌ها را طبق رابطهٔ $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مجموع}=\frac{۱۳}{۲}(۱۴+۹۸)=۷۲۸$$

۱۰۶- گزینهٔ «۴» مدت‌زمان تایپ بهروز : x

مدت‌زمان تایپ فرهاد : y

بهروز ۹ ساعت زودتر از فرهاد مجله را تایپ می‌کند:

$$x=y-۹ \Rightarrow y=x+۹$$

اگر هر دو با هم کار کنند، کار در ۲۰ ساعت انجام می‌شود؛ پس:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۱}{۲۰} \xrightarrow{y=x+۹} \frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۹}=\frac{۱}{۲۰}$$
$$\Rightarrow \frac{۲x+۹}{x(x+۹)}=\frac{۱}{۲۰} \Rightarrow x^{۲}+۹x=۴۰x+۱۸۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۳۱x-۱۸۰=۰ \Rightarrow (x-۳۶)(x+۵)=۰$$

مدت‌زمانی که بهروز به تنهایی مجله را تایپ می‌کند: $\xrightarrow{x>۰} x=۳۶$

۱۰۷- گزینهٔ «۱» ابتدا تابع $f^{-۱}$ و سپس تابع $gof^{-۱}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}=\{(۲,۱),(۵,۲),(۴,۳),(۶,۴)\}$$

سپس با توجه به تابع $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ تابع $gof^{-۱}$ را تشکیل می‌دهیم. برای این کار از دامنهٔ تابع داخلی یعنی تابع $f^{-۱}$ شروع می‌کنیم:

$$\begin{cases} x=۲: g(f^{-۱}(۲))=g(۱): \text{تشکیل نمی‌شود} \\ x=۵: g(f^{-۱}(۵))=g(۲)=۳ \Rightarrow (۵,۳)\in gof^{-۱} \\ x=۴: g(f^{-۱}(۴))=g(۳)=۱ \Rightarrow (۴,۱)\in gof^{-۱} \\ x=۶: g(f^{-۱}(۶))=g(۴)=۲ \Rightarrow (۶,۲)\in gof^{-۱} \end{cases}$$
$$\Rightarrow gof^{-۱}=\{(۵,۳),(۴,۱),(۶,۲)\}$$

حالا باید تابع $\frac{g}{gof^{-۱}}$ را تشکیل دهیم. دامنهٔ مشترک دو تابع g و $gof^{-۱}$ برابر $\{۵,۴\}$ است، پس با توجه به گزینه‌ها، گزینهٔ (۱) صحیح است.

۱۰۸- گزینهٔ «۴» نمودار تابع $f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}$ نمودار تابع $y=x^{۲}-x$ را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده؛ پس معادلهٔ تلاقی آن‌ها دو ریشهٔ ۱ و ۲ دارد.

تلاقی: $-۲+(\frac{۱}{۲})^{Ax+B}=x^{۲}-x$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱: -۲+(\frac{۱}{۲})^{A+B}=۰ \Rightarrow ۲^{-A-B}=۲ \\ x=۲: -۲+(\frac{۱}{۲})^{۲A+B}=۲ \Rightarrow ۲^{-۲A-B}=۴=۲^{۲} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} -A-B=۱ \\ -۲A-B=۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} A=-۱ \Rightarrow B=۰$$
$$\Rightarrow f(x)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-x}$$
$$\Rightarrow f(۳)=-۲+(\frac{۱}{۲})^{-۳}=-۲+۸=۶$$

۱۰۹- گزینهٔ «۲» هر یک از عبارات را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\tan\frac{۱۱\pi}{۴}=\tan(۳\pi-\frac{\pi}{۴})=-\tan\frac{\pi}{۴}=-۱$$
$$\sin\frac{۱۵\pi}{۴}=\sin(۴\pi-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos\frac{۱۳\pi}{۴}=\cos(۳\pi+\frac{\pi}{۴})=-\cos\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین:

$$\tan\frac{11\pi}{4}+\sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}=-1+(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{1}{2}$$

۱۱۰- گزینهٔ «۳»

راه اول: از $\sin a$ فاکتور می‌گیریم

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin a\cos x+\cos a\sin x-\sin a}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin a(\cos x-1)+\cos a\sin x}{x}$$

حالا با استفاده از هم‌ارزی‌های $1-\cos u\underset{u\to 0}{\sim}\frac{u^2}{2}$ و $\sin u\underset{u\to 0}{\sim}u$ داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin a(-\frac{x^2}{2})+\cos a(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin a(-\frac{x}{2})+\cos a)\,x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sin a(-\frac{x}{2})+\cos a=0+\cos a=\cos a$$

راه دوم: هوپیتال می‌گیریم:

$$\text{حد}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin a(-\sin x)+\cos a(\cos x)-0}{1}$$

$$=0+\cos a=\cos a$$

۱۱۱- گزینهٔ «۳» **راه اول:** برای این‌که تابع در مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، باید تابع در $x=2$ نیز پیوسته باشد. در نتیجه:

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}\overset{\text{گویا}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{3\cancel{(x-2)}(x+\sqrt{x+2})}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\frac{3\times 4}{3}=4$$

$$\text{حد چپ}=\lim_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1$$

$$\text{مقدار}=2a-1\Rightarrow 2a-1=4\Rightarrow a=\frac{5}{2}=2/5$$

راه دوم: برای محاسبهٔ حد راست:

$$\text{حد راست}=\lim_{x\to 2^+}\frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}$$

$$=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$$

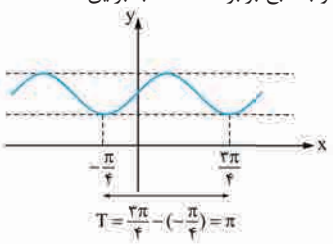
۱۱۲- گزینهٔ «۳» با استفاده از رابطهٔ $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$y=1+a(\frac{1}{2}\sin 2bx)=1+\frac{a}{2}\sin 2bx$$

با توجه به نمودار، بیشترین مقدار تابع برابر $\frac{3}{2}$ است، پس:

$$1+|\frac{a}{2}|=\frac{3}{2}\Rightarrow|\frac{a}{2}|=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\pm 1$$

از طرفی دورهٔ تناوب تابع برابر π است؛ بنابراین:



$$T=\frac{2\pi}{|2b|}=\pi\Rightarrow|b|=1\Rightarrow b=\pm 1$$

از آن‌جا که نمودار تابع بلافاصله بعد از محور yها در حال افزایش است، پس ضریب نهایی سینوس باید مثبت باشد. در نتیجه $a=1$ و $b=1$ قابل‌قبول است؛ بنابراین $a+b=2$.

(البته $a=-1$ و $b=-1$ نیز قابل‌قبول است، اما $a+b=-2$ در گزینه‌ها نیست.)

۱۱۳- گزینهٔ «۱» در سمت چپ تساوی از اتحاد چاق و لاغر و در سمت راست از رابطهٔ $\sin 2x=2\sin x\cos x$ استفاده می‌کنیم:

معادله: $(\sin x+\cos x)(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1}-\sin x\cos x)$

$$=1-\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1-\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)-(1-\sin x\cos x)=0$$

$$\Rightarrow(1-\sin x\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-\sin x\cos x=0\Rightarrow\sin x\cos x=1\\ \sin x+\cos x-1=0\Rightarrow\sin x+\cos x=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\sin 2x=1\Rightarrow\sin 2x=2\ (\text{جواب ندارد})\\ \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi\\ \xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=0,2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \xrightarrow{x\in[0,2\pi]}x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

بنابراین:

$$\text{مجموع جواب‌ها}=0+2\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{2}$$

۱۱۴- گزینهٔ «۲» وقتی $x\to 2$ حد صورت برابر -1 است؛ پس با توجه به حاصل حد $(-\infty)$ حد مخرج باید صفر باشد و هم از چپ و هم از راست با مقادیر بیشتر از صفر، به صفر نزدیک شود. در نتیجه مخرج کسر باید ریشهٔ مضاعف $x=2$ داشته باشد (چون $x\to 2$)؛ بنابراین با توجه به عبارت مخرج داریم:

$$\text{مخرج}=(x-2)^2\Rightarrow\text{مخرج}=x^2\underbrace{-4}_{a}x\underbrace{+4}_{b}\Rightarrow a+b=0$$

۱۱۵- گزینهٔ «۳» با توجه به تعریف مشتق تابع مرکب داریم:

$$(fog)'(1)=g'(1)f'(g(1))$$

از آن‌جا که $g(x)=x+\sqrt{x}$؛ بنابراین:

$$g(1)=2\Rightarrow(fog)'(1)=g'(1)f'(2)\ (*)$$

حد داده‌شده در صورت سؤال، همان تعریف مشتق تابع f در $x=2$ است؛ بنابراین:

$$f'(2)=\frac{4}{3}$$

از طرفی:

$$g(x)=x+\sqrt{x}\Rightarrow g'(x)=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow g'(1)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

بنابراین با توجه به (*) داریم:

$$(fog)'(1)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=2$$

کنکور سراسری ۹۸

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۱۶- گزینهٔ «۱» برای این‌که تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، باید:

۱) تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} |x^۲-۲x| = ۰$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (\frac{۱}{۲}x^۲+ax+b) = ۲+۲a+b$$

$$f(۲) = ۲+۲a+b$$

$$\Rightarrow ۲+۲a+b=۰ \Rightarrow ۲a+b=-۲ \ (*)$$

۲) مشتق چپ و راست تابع در $x=۲$ با هم برابر باشند:

محاسبهٔ مشتق راست: $x\to ۲^+ : f(x)=\frac{۱}{۲}x^۲+ax+b$

$$\Rightarrow f'(x)=x+a \Rightarrow f'_+(۲)=۲+a$$

محاسبهٔ مشتق چپ: $x\to ۲^- : f(x)=|x^۲-۲x|$

قبل از مشتق‌گیری باید قدرمطلق را حذف کنیم. برای این کار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$x^۲-۲x=x(x-۲) \xrightarrow{x\to ۲^-} \underbrace{x}_{+}\underbrace{(x-۲)}_{-}<۰$$

در نتیجه:

$$|\underbrace{x^۲-۲x}_{-}| = -x^۲+۲x \Rightarrow f(x)=-x^۲+۲x$$

$$\Rightarrow f'(x)=-۲x+۲ \Rightarrow f'_-(۲)=-۲$$

بنابراین باید: $f'_+(۲)=f'_-(۲) \Rightarrow ۲+a=-۲ \Rightarrow a=-۴$

$$\xrightarrow{(*)} ۲(-۴)+b=-۲ \Rightarrow b=۶ \Rightarrow a+b=۲$$

۱۱۷- گزینهٔ «۴»

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در بازهٔ } [۰,۲] = \frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰} = \frac{۴(\sqrt{۹})-۲(۱)}{۲}$$

$$= \frac{۱۲-۲}{۲} = ۵$$

برای محاسبهٔ آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=\frac{۳}{۴}$ باید $f'(\frac{۳}{۴})$ را محاسبه کنیم:

$$f(x)=(x+۲)\sqrt{۴x+۱}$$

$$\Rightarrow f'(x)=(۱)\sqrt{۴x+۱}+\frac{۴}{۲\sqrt{۴x+۱}}(x+۲)$$

$$\Rightarrow f'(\frac{۳}{۴})=\sqrt{۴}+\frac{۴}{۲\sqrt{۴}}(\frac{۳}{۴}+۲)=۲+(\frac{۱۱}{۴})=\frac{۱۹}{۴}$$

در نتیجه آهنگ تغییر متوسط به اندازهٔ $(۵-\frac{۱۹}{۴})=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای بیشتر است.

۱۱۸- گزینهٔ «۱» با توجه به نمودار، خط مماس بر تابع در $x=۰$ و $x=۱$ افقی است، بنابراین $f'(۰)=f'(۱)=۰$. در نتیجه:

$$f(x)=۳x^۴+ax^۳+bx^۲+cx$$

$$\Rightarrow f'(x)=۱۲x^۳+۳ax^۲+۲bx+c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(۰)=۰+۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰ \\ f'(۱)=۱۲+۳a+۲b+c=۰ \xrightarrow{c=۰} ۳a+۲b=-۱۲ \ (*) \end{cases}$$

هم‌چنین $x=۱$ طول نقطهٔ عطف تابع است؛ بنابراین $f''(۱)=۰$:

$$f'(x)=۱۲x^۳+۳ax^۲+۲bx+c$$

$$\Rightarrow f''(x)=۳۶x^۲+۶ax+۲b$$

$$\Rightarrow f''(۱)=۳۶+۶a+۲b=۰ \Rightarrow ۶a+۲b=-۳۶ \ (**)$$

از دو معادلهٔ (*) و (**) داریم:

$$\begin{cases} ۳a+۲b=-۱۲ \\ ۶a+۲b=-۳۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳a=-۲۴ \Rightarrow a=-۸$$

۱۱۹- گزینهٔ «۳» مجانب قائم تابع به ازای ریشهٔ مخرج حاصل می‌شود:

مجانب قائم: $(x-۱)^۲=۰ \Rightarrow x=۱$

حالا مینیمم مطلق تابع را می‌یابیم. برای این کار ابتدا نقاط بحرانی تابع را محاسبه می‌کنیم:

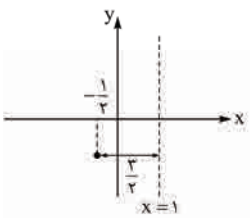
$$f'(x)=\frac{(۲x+۲)(x-۱)^۲-۲(x-۱)(x^۲+۲x)}{(x-۱)^۴}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x-۱)((۲x+۲)(x-۱)-۲(x^۲+۲x))}{(x-۱)^۴}$$

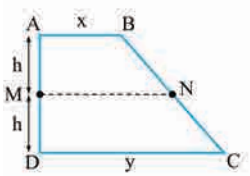
$$\Rightarrow f'(x)=\frac{۲x^۲-۲-۲x^۲-۴x}{(x-۱)^۳}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-۲-۴x}{(x-۱)^۳}=۰ \Rightarrow -۲-۴x=۰$$

$$\Rightarrow ۴x=-۲ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \text{ نقطهٔ بحرانی}$$



پس مینیمم مطلق تابع به ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ حاصل می‌شود؛ چون فاصلهٔ نقطهٔ مینیمم از خط مجانب قائم را می‌خواهیم، نیازی به محاسبهٔ مقدار تابع در $x=-\frac{۱}{۲}$ نداریم. با توجه به شکل مقابل، فاصلهٔ موردنظر برابر $\frac{۳}{۲}$ است.



۱۲۰- گزینهٔ «۲» **نکته:** پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه‌ای را به هم وصل می‌کند موازی با دو قاعده و مساوی نصف مجموع دو قاعده است. (میان‌خط در ذوزنقه)

اگر طول قاعده‌ها x و y باشند، آن‌گاه:

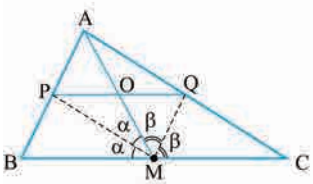
$$MN=\frac{x+y}{۲} \Rightarrow ۲MN=x+y \quad (۱)$$

از طرفی:

$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}}=\frac{\frac{۱}{۲}(x+MN)h}{\frac{۱}{۲}(y+MN)h}=\frac{x+MN}{y+MN}=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow ۵x+۵MN=۳y+۳MN \Rightarrow ۲MN=۳y-۵x \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x+y=۳y-۵x \Rightarrow ۶x=۲y \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$



۱۲۱- گزینهٔ «۴» **نکته:** نیمساز هر زاویهٔ داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کند.

$$MP \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMB \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AM}{BM} \quad (۱)$$

$$MQ \text{ نیمساز } \hat{M} \text{ در مثلث } AMC \Rightarrow \frac{AQ}{QC}=\frac{AM}{CM} \quad (۲)$$

$$M \text{ وسط } BC \Rightarrow BM=CM \quad (۳)$$

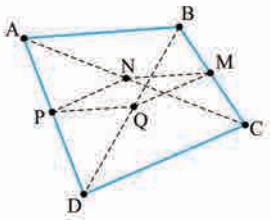
$$(۱),(۲),(۳) \Rightarrow \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

ریاضیات رشتهٔ ریاضی
www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

چون M میانه است، پس AO نیز میانهٔ APQ است و O وسط PQ می‌باشد. اما $\alpha+\beta=90^\circ$ پس PMQ در رأس M قائم‌الزاویه است و

چون OM میانهٔ نظیر وتر است، پس: $OM=\frac{1}{2}PQ=OP$

۱۲۲- گزینهٔ «۱» **نکته:** خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به هم وصل می‌کند موازی و مساوی نصف ضلع سوم مثلث است. این خط را میان‌خط در مثلث می‌نامند.



$\Rightarrow MN\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}AB$ در مثلث ABC، MN میان‌خط است.

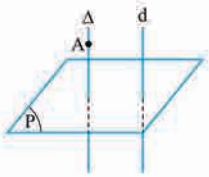
$\Rightarrow MQ\overset{\parallel}{=}\frac{1}{2}CD$ در مثلث BCD، MQ میان‌خط است.

چون MNPQ لوزی است. پس $MN=MQ$ و در نتیجه $AB=CD$.

یعنی دو ضلع غیر مجاور دیگر باید برابر باشند.

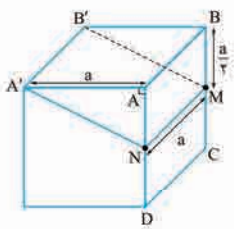
۱۲۳- گزینهٔ «۴» **نکته:** ۱) اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحه که بر آن خط می‌گذرد بر آن صفحه عمود است.

۲) اگر خطی با یکی از خط‌های صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است.



از A خطی موازی با d رسم می‌کنیم و آن را Δ می‌نامیم. اگر d بر P عمود باشد Δ نیز بر P عمود است. و هر صفحه‌ای که از Δ بگذرد بر P عمود و با d موازی است و شامل نقطهٔ A نیز هست. پس برای این‌که بی‌نهایت جواب داشته باشد باید d بر P عمود باشد.

۱۲۴- گزینهٔ «۲» اگر M و N وسط یال‌های BC و AD باشند، دو پاره‌خط $A'B'$ و MN موازی هستند و صفحه‌ای از آن‌ها می‌گذرد. این صفحه، مکعب را به یک منشور سه‌پهلو با حجم V_1 و بخش دیگری با حجم V_2 تقسیم می‌کند. اگر طول یال مکعب a باشد، آن‌گاه:



$V_1=S_{AA'N}\times AB=(\frac{1}{2}a\times\frac{a}{2})\times a=\frac{a^3}{4}$

چون حجم مکعب a^3 است، پس $V_2=a^3-V_1=\frac{3}{4}a^3$ و در نتیجه:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{a^3}{4}}{\frac{3a^3}{4}}=\frac{1}{3}$$

۱۲۵- گزینهٔ «۴» **نکته:** ۱) کمان‌های بین دو وتر موازی با هم برابرند.

۲) اگر طول وتری a و زاویهٔ مرکزی نظیرش θ باشد، آن‌گاه:

$a=2R\sin\frac{\theta}{2}$

چون $AB=R$، پس:

$R=2R\sin\frac{\theta}{2}\Rightarrow\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\theta}{2}=30^\circ\Rightarrow\theta=60^\circ$

در نتیجه: $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$

زاویهٔ محاطی $\alpha\Rightarrow\alpha=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\Rightarrow\overset{\frown}{AC}=2\alpha$

در نتیجه $\overset{\frown}{BD}=2\alpha$. از طرفی:

زاویهٔ محاطی $\beta\Rightarrow\beta=\frac{\overset{\frown}{DC}}{2}\Rightarrow\overset{\frown}{DC}=2\beta$

$\xrightarrow{\beta=2\alpha}\overset{\frown}{DC}=4\beta$

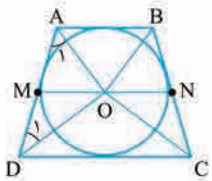
مجموع کمان‌های یک دایره‌ی کامل 360° است، پس:

$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{DB}+\overset{\frown}{DC}+\overset{\frown}{AC}=360^\circ\Rightarrow60^\circ+2\alpha+4\alpha+2\alpha=360^\circ$

$\Rightarrow8\alpha=300^\circ\Rightarrow2\alpha=75^\circ$

پس: $\overset{\frown}{BD}=2\alpha=75^\circ$

۱۲۶- گزینهٔ «۴» **نکته:** مرکز دایرهٔ محاطی هر چندضلعی محیطی، نقطهٔ همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن است. اگر وتر M و N وسط ساق‌های ذوزنقه باشند، آن‌گاه:



$\hat{A}+\hat{D}=180^\circ\Rightarrow\hat{A}_1+\hat{D}_1=90^\circ$

پس مثلث AOD در رأس O قائم‌الزاویه است و OM میانهٔ نظیر وتر است و $OM=\frac{1}{2}AD$ به همین دلیل $ON=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$ همچنین ON و OM بر یک راستا هستند. پس:

$MN=OM+ON=\frac{1}{2}AD+\frac{1}{2}AD=AD$

یعنی طول پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق را به هم وصل می‌کند برابر با یکی از ساق‌هاست.

۱۲۷- گزینهٔ «۳» **نکته:** ۱) طول ضلع، nضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R، برابر است با:

$C_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$

۲) طول ضلع، n ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع R، برابر است با:

$C'_n=2R\tan\frac{180^\circ}{n}$

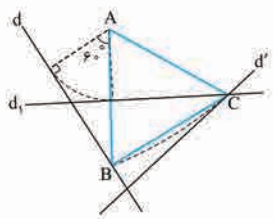
$$\frac{C_6}{C'_6}=\frac{2R\sin\frac{180^\circ}{6}}{2R\tan\frac{180^\circ}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

چون دو شش‌ضلعی منتظم، متشابه‌اند. پس:

$\frac{S_6}{S'_6}=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\Rightarrow\frac{6\sqrt{3}}{S'_6}=\frac{3}{4}\Rightarrow S'_6=8\sqrt{3}$

یعنی هشت برابر $\sqrt{3}$ است.

۱۲۸- گزینهٔ «۴»



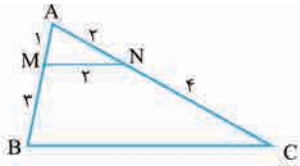
اگر ABC جواب مسئله باشد. چون $AB=AC, B\hat{A}C=60^\circ$ است. پس C دوران یافتهٔ B حول A به اندازهٔ 60° می‌باشد.

کافی است دوران یافتهٔ d را حول A به اندازهٔ 60° پیدا کنیم تا d_1 حاصل شود. d_1 خط d' را در C قطع می‌کند. به مرکز A و شعاع AC قوسی می‌زنیم تا d را در B قطع کند. مثلث ABC جواب مسئله است.

پس برای حل مسئله به تبدیل دوران نیازمندیم.

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

۱۲۹- گزینهٔ «۱» در مثلث AMN



بنا بر رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$۲^۲ = ۲^۲ + ۱^۲ - ۲\times ۲\times ۱\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{۱}{۴}$$

اکنون در مثلث ABC بنا بر رابطهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ - ۲AB\times AC\cos A$$

$$= ۴^۲ + ۶^۲ - ۲\times ۴\times ۶\times \frac{۱}{۴} = ۱۶ + ۳۶ - ۱۲ = ۴۰ \Rightarrow BC = ۲\sqrt{۱۰}$$

چون $۲\sqrt{۱۰}$ از $MN = ۲$ ، $NC = ۴$ و $MB = ۳$ بزرگ‌تر است. پس بزرگ‌ترین ضلع چهارضلعی $۲\sqrt{۱۰}$ است.

۱۳۰- گزینهٔ «۱» ابتدا حاصل‌ضرب دو ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix}$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & ۱ \\ ۴ & ۰ & -۲ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۲x \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x - ۲x - ۱ \\ ۴x + ۰ + ۲ \\ x + ۴x + ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - ۱ \\ ۴x + ۲ \\ ۵x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل‌ضرب ماتریس $[-۱ \quad ۲x \quad x]$ را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا x پیدا شود.

$$[x \quad ۲x \quad -۱]\begin{bmatrix} x - ۱ \\ ۴x + ۲ \\ ۵x \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow x(x-۱) + ۲x(۴x+۲) - ۱(۵x) = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x + ۸x^۲ + ۴x - ۵x = ۰ \Rightarrow ۹x^۲ - ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow x(۹x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۲}{۹} \end{cases}$$

سؤال، عدد غیرصفر x را خواسته، پس جواب سؤال $x = \frac{۲}{۹}$ است.

۱۳۱- گزینهٔ «۲» با ضرب طرفین رابطهٔ $AX = A - ۲I$ در $A^{-۱}$ (البته از چپ!)، X تنها می‌شود.

$$AX = A - ۲I \xrightarrow{A^{-۱}\times} X = I - ۲A^{-۱}$$

اگر وارون ماتریس A را به دست آوریم، X به راحتی به دست می‌آید.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$X = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - ۲\times\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

۱۳۲- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $|A|$، عدد است و هرگاه عدد از دترمینان بیرون بیاید به توان مرتبهٔ ماتریس می‌رسد. بنابراین:

$$||A|A| = |A|^۳|A| = |A|^۴ = ۴^۴ = (۲^۲)^۴ = ۲^۸ = ۲۵۶$$

۱۳۳- گزینهٔ «۴» **روش اول:** چون نقطهٔ $(-۱,۴)$ روی دایرهٔ C است پس باید در معادلهٔ دایرهٔ C صدق کند. $(-۱,۴)$ فقط در معادلهٔ دایرهٔ گزینهٔ (۴) صدق می‌کند.

روش دوم:

دقت کنید: چون دو دایره وتر مشترک دارند پس متقاطع‌اند. وتر مشترک دو دایره منطبق بر خط $y = x$ است؛ یعنی اگر معادلهٔ دو دایره را در دستگاه حل کنیم (از هم کم کنیم!) باید $y = x$ به دست آید.

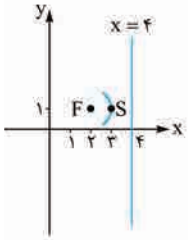
$$\xrightarrow{\text{دایرهٔ صورت سؤال}} x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{\text{دایرهٔ گزینهٔ (۴)}} x^۲ + y^۲ - x - ۳y - ۶ = ۰$$

$$\xrightarrow{-} -۳x + ۳y = ۰ \Rightarrow ۳y = ۳x \Rightarrow y = x$$

دایره‌های داده‌شده در صورت سؤال و گزینهٔ (۴) را در دستگاه حل کردیم و به ما $y = x$ داد.

۱۳۴- گزینهٔ «۱» نقطه و خط داده‌شده را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. رأس سهمی وسط کانون و خط هادی است؛ پس رأس سهمی $S(۳,۱)$ است و دهانهٔ سهمی رو به جهت منفی محور x ها باز می‌شود؛ یعنی $a = -۱$ است. (F همواره در دهانهٔ سهمی است!)



سهمی، افقی است و معادلهٔ آن عبارت است از: $(y-۱)^۲ = ۴(-۱)(x-۳)$

اگر معادلهٔ بالا را به صورت گسترده بنویسیم، داریم:

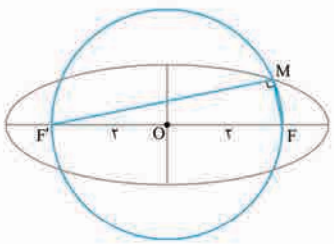
معادلهٔ سهمی: $y^۲ - ۲y + ۴x = ۱۱$

۱۳۵- گزینهٔ «۲» طول قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی داده شده، پس:

$$\begin{cases} ۲a = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow a = \sqrt{۵} \\ ۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

به کمک رابطهٔ $a^۲ - b^۲ = c^۲$ در بیضی داریم: $۵ - ۱ = c^۲ \Rightarrow c = ۲$

دایرهٔ گفته‌شده به مرکز بیضی و شعاع ۲ است و این یعنی دایره از کانون‌های بیضی می‌گذرد (چرا؟ چون $c = ۲$ شده!). شکل را ببینید!



واضح است که زاویهٔ بین MF و MF'، قائمه است؛ زیرا $\hat{M}$ محاطی و روبه‌رو به کمان ۱۸۰° است. سؤال از ما $MF^۲ + MF'^۲$ را خواسته، یعنی نوشتن یک فیثاغورس ساده در مثلث MFF' ما را به جواب سؤال می‌رساند.

$$FF'^۲ = MF^۲ + MF'^۲ \Rightarrow ۴^۲ = MF^۲ + MF'^۲$$

$$\Rightarrow MF^۲ + MF'^۲ = ۱۶$$

۱۳۶- گزینهٔ «۴» برای این‌که سه بردار در یک صفحه باشند باید حاصل‌ضرب مختلط آن‌ها برابر صفر شود. پس:

$$\vec{b}.(\vec{a}\times\vec{c}) = ۰ \Rightarrow \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۳ \\ -۴ & m & ۵ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow ۲(۱۰ - ۳m) + (-m + ۸) = ۰ \Rightarrow ۲۸ - ۷m = ۰ \Rightarrow m = ۴$$

دقت کنید: نسبت به سطر اول که تعداد صفر بیشتری داشت، دترمینان گرفتیم.

۱۳۷- گزینهٔ «۳» می‌دانیم $A \cap B'$ همان $A - B$ است. مجموعهٔ A دارای پنج عضو است: $۱, ۲, \{۱,۲\}, \{۱,\{۱,۲\}\}, \{۲\}$

مجموعهٔ B نیز دو عضو دارد: $\{۱\}, \{۱,۲\}$

همان‌طور که می‌بینید، $\{۱,۲\}$ عضو مشترک هر دو مجموعه است؛ بنابراین $A - B$ دارای ۴ عضو است: $|A - B| = |A| - |A \cap B| = ۵ - ۱ = ۴$

می‌دانیم یک مجموعهٔ n عضوی دارای ۲^n زیرمجموعه است؛ بنابراین تعداد

زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A-B$ برابر است با: $2^4=16$

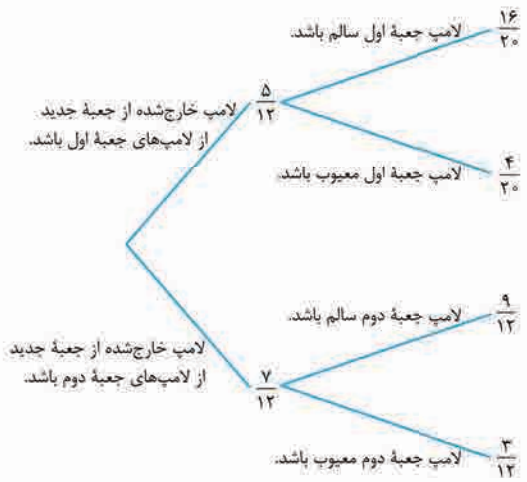
۱۳۸- گزینهٔ «۲» در جعبهٔ جدید ۱۲ لامپ وجود دارد که ۵ تای آن از جعبهٔ اول و ۷ تای دیگر از جعبهٔ دوم آمده است، پس لامپی که از این جعبهٔ جدید خارج می‌کنیم، به احتمال $\frac{5}{12}$ از لامپ‌های جعبهٔ اول و به احتمال $\frac{7}{12}$ از لامپ‌های جعبهٔ دوم بوده است

$$P(\text{معیوب‌بودن لامپ جعبهٔ جدید})=\frac{5}{12}\times\frac{4}{20}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{12}$$

احتمال این‌که لامپی که از جعبهٔ اول آمده، معیوب باشد.

احتمال این‌که لامپی که از جعبهٔ دوم آمده، معیوب باشد.

با استفاده از نمودار درختی نیز می‌شد به سؤال پاسخ داد.



$$\Rightarrow \frac{5}{12}\times\frac{4}{20}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{12}=\frac{11}{48}$$

۱۳۹- گزینهٔ «۳» اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)\quad,\quad P(A\cap B')=P(A)P(B')$$

بنابراین:

$$\begin{matrix}P(A)P(B)=0/6\\ P(A)P(B')=0/2\end{matrix}\xrightarrow{\div}\frac{P(B)}{P(B')}=3$$

$$\Rightarrow \frac{P(B)}{1-P(B)}=3\Rightarrow P(B)=3-3P(B)$$

$$\Rightarrow 4P(B)=3\Rightarrow P(B)=\frac{3}{4}$$

حالا با توجه به این‌که $P(A\cap B)=\frac{6}{10}$ است، داریم:

$$P(A)\times\frac{3}{4}=\frac{6}{10}\Rightarrow P(A)=0/8\Rightarrow P(A')=0/2$$

از طرفی می‌دانیم:

$$P(A\cup B')=1-P(A'\cap B)=1-P(A')P(B)$$

$$=1-\frac{2}{10}\times\frac{3}{4}=\frac{17}{20}=0/85$$

۱۴۰- گزینهٔ «۱» می‌دانیم میانگین وزنی n داده از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{10\times5+12\times8+14\times7+15\times10+17\times6+18\times4}{5+8+7+10+6+4}$$

$$=\frac{568}{40}=14/2$$

۱۴۱- گزینهٔ «۲» داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$10/6,10/6,11/2,11/5,11/9,12/3,12/7,12/8,13/5,30/2$$

۱۰ داده داریم. Q_2 یا میانه برابر است با میانگین داده‌های پنجم و ششم:

$$Q_2=\frac{11/9+12/3}{2}=12/1$$

Q_1 یا چارک اول برابر است با میانهٔ نیمهٔ اول داده‌ها، یعنی میانهٔ ۵ دادهٔ نخست:

$$10/6,10/6,\underset{\downarrow}{11/2},11/5,11/9\quad\Rightarrow Q_1$$

Q_3 یا چارک سوم برابر است با میانهٔ نیمهٔ دوم داده‌ها، یعنی میانهٔ ۵ دادهٔ آخر:

$$12/3,12/7,\underset{\downarrow}{12/8},13/5,30/2\quad\Rightarrow Q_3$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1+Q_3-2Q_2}{Q_3-Q_1}=\frac{11/2+12/8-2\times12/1}{12/8-11/2}=\frac{-0/2}{1/6}$$

$$=\frac{-1}{8}=-0/125$$

۱۴۲- گزینهٔ «۱» **روش اول:** عدد را n می‌نامیم. با توجه به اطلاعات داده‌شده داریم:

$$\begin{array}{c|l}n & 6\\ \hline q & \end{array}\Rightarrow n=6q+5\xrightarrow{\times11}11n=66q+55\qquad(I)$$

$$\begin{array}{c|l}n & 11\\ \hline q' & \end{array}\Rightarrow n=11q'+7\xrightarrow{\times12}12n=132q'+84\qquad(II)$$

حالا دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$(II)-(I):n=132q'+84-66q-55=132q'-66q+29$$
$$=66(2q'-q)+29$$

بنابراین باقی‌ماندهٔ n بر ۶۶ برابر ۲۹ است.

روش دوم: با استفاده از معادلهٔ هم‌نهشتی به سؤال پاسخ می‌دهیم:

$$\begin{matrix}n=6q+5\\ n=11q'+7\end{matrix}\Rightarrow 6q+5=11q'+7\Rightarrow 11q'=6q-2$$

$$\Rightarrow 11q'\overset{6}{\equiv}-2\Rightarrow -q'\overset{6}{\equiv}-2\Rightarrow q'\overset{6}{\equiv}2\Rightarrow q'=6k+2$$
$$\Rightarrow n=11q'+7=11(6k+2)+7=66k+22+7=66k+29$$

۱۴۳- گزینهٔ «۲» می‌دانیم سمت راست رابطهٔ عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. داریم:

$$\begin{matrix}\alpha\mid13n+3\xrightarrow{\text{سمت راست}\times7}\alpha\mid91n+21\\ \alpha\mid7n+4\xrightarrow{\text{سمت راست}\times13}\alpha\mid91n+52\end{matrix}\xrightarrow{(-)}\alpha\mid31$$

$$\Rightarrow \alpha=1\text{ یا }31$$

با توجه به این‌که $\alpha\neq1$ است، پس $\alpha=31$ است؛ یعنی دو عبارت بر ۳۱ بخش‌پذیرند. داریم:

$$31\mid7n+4\Rightarrow 7n+4\overset{31}{\equiv}0\Rightarrow 7n\overset{31}{\equiv}-4$$

$$\xrightarrow{\times9}63n\overset{31}{\equiv}-36\overset{31}{\equiv}26$$

از طرفی می‌دانیم $62n\overset{31}{\equiv}0$ است:

کنکور سراسری ۹۸

www.2080.ir آکادمی ۲۰۸۰ – دانش برای همه

$$۶۳n \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶ \\ ۶۲n \overset{۳۱}{\equiv} ۰ \xrightarrow{(-)} n \overset{۳۱}{\equiv} ۲۶ \Rightarrow n = ۳۶k + ۲۶$$

$$\xrightarrow{k=۰} n_{min} = ۲۶ \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = ۲ + ۶ = ۸$$

۱۴۴- گزینهٔ «۳» تعداد کالای اول خریداری‌شده را با x و تعداد کالای دوم خریداری‌شده را با y نشان می‌دهیم. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$۲۲۰x + ۱۴۰y = ۱۹۰۰۰ \xrightarrow{\div ۲۰} ۱۱x + ۷y = ۹۵۰$$

معادلهٔ سیالهٔ داده‌شده را به یک معادلهٔ هم‌نهشتی تبدیل کرده، حل می‌کنیم:

$$۱۱x \overset{۷}{\equiv} ۹۵۰ \Rightarrow ۴x \overset{۷}{\equiv} ۵ \xrightarrow{\times ۲} ۸x \overset{۷}{\equiv} ۱۰ \overset{۷}{\equiv} ۳ \xrightarrow{(-)} x \overset{۷}{\equiv} ۳$$

$$۷x \overset{۷}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow x = ۷k + ۳$$

با جای‌گذاری در معادلهٔ سیاله داریم:

$$۱۱(۷k + ۳) + ۷y = ۹۵۰ \Rightarrow ۷۷k + ۳۳ + ۷y = ۹۵۰$$

$$\Rightarrow ۷y = ۹۱۷ - ۷۷k \Rightarrow y = ۱۳۱ - ۱۱k$$

می‌دانیم تعداد کالاها نمی‌تواند منفی باشد! بنابراین:

$$x > ۰ \Rightarrow ۷k + ۳ > ۰ \Rightarrow k > -\frac{۳}{۷}$$

$$y > ۰ \Rightarrow ۱۳۱ - ۱۱k > ۰ \Rightarrow k < \frac{۱۳۱}{۱۱}$$

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۷} < k < \frac{۱۳۱}{۱۱}$$

$$\Rightarrow k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۱$$

یعنی با ۱۹۰۰۰ تومان به ۱۲ طریق می‌توان از این دو کالا خریداری کرد.

(حالا این‌ها چه کالاهایی هستند که این‌قدر ارزون؟!)

۱۴۵- گزینهٔ «۲» باقی‌ماندهٔ $۷^{۱۳}$ را بر ۲۳ به دست می‌آوریم:

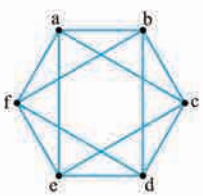
$$۷^۳ \overset{۲۳}{\equiv} -۲ \xrightarrow{\text{به توان } ۴} ۷^{۱۲} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۱۳} \overset{۲۳}{\equiv} ۱۱۲ \overset{۲۳}{\equiv} ۲۰$$

می‌دانیم $۷^{۱۳} + a$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$$۷^{۱۳} + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۲۰ + a \overset{۲۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow a \overset{۲۳}{\equiv} -۲۰ \overset{۲۳}{\equiv} ۳$$

بنابراین کوچک‌ترین عدد طبیعی a که به ازای آن رابطه برقرار باشد، برابر ۳ است.

۱۴۶- گزینهٔ «۴» شکل گراف به صورت مقابل است:

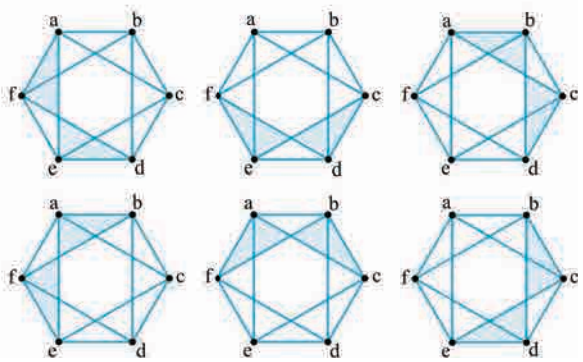


۹ دور به طول ۴ زیر، به صورت چهارضلعی‌اند:

abdea/bcefb/cdfac/fabdf/abcea/bcdfb/cdeac/defbd/eface

اما گراف یک سری دور به طول ۴ به صورت زیگزاگی نیز دارد:

edfae / cdfec / abdca / abfea / bcafb / bcedb



بنابراین در کل، گراف دارای ۱۵ دور به طول ۴ است.

۱۴۷- گزینهٔ «۳» تعداد توپ‌هایی که به نفر اول می‌دهیم را با $x_۱$، تعداد توپ‌های نفر دوم را با $x_۲$ و به همین ترتیب تعداد توپ‌های نفر پنجم را با $x_۵$ نشان می‌دهیم. تعداد کل توپ‌ها ۱۱ تاست، بنابراین:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱$$

می‌دانیم تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ برابر $\binom{n-۱}{k-۱}$ است با:

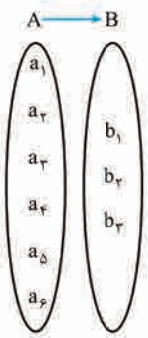
در این سؤال $k = ۵$ و $n = ۱۱$ است، بنابراین:

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۱۰}{۴} = \frac{۱۰!}{۶!\,۴!} = ۲۱۰$$

۱۴۸- گزینهٔ «۴» فرض کنید $A = \{a_۱, a_۲, \ldots, a_۶\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$ باشد. می‌خواهیم تعداد توابع پوشا را از A به B به دست آوریم. برای این کار تعداد توابع غیرپوشا را پیدا کرده، از کل توابع کم می‌کنیم. اما اگر بخواهیم تابع پوشا نباشد، باید دست‌کم یکی از $b_۱$ یا $b_۲$ یا $b_۳$ در برد تابع نباشد. بنابراین تعداد توابع غیرپوشا را می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول به دست آورید:

تابعی که در برد آن نه $b_۱$ باشد و نه $b_۲$ ↑ تابعی که $b_۱$ در برد آن نباشد. ↑

$$|b_۱' \cup b_۲' \cup b_۳'| = |b_۱'| + |b_۲'| + |b_۳'| - |b_۱' \cap b_۲'| - |b_۲' \cap b_۳'| - |b_۱' \cap b_۳'| + |b_۱' \cap b_۲' \cap b_۳'|$$



$b_۱' \cap b_۲'$	$b_۱'$	کل توابع
۱	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۲	۳
۱	۶۴	۷۲۹

چون قرار است $b_۱$ در برد تابع نباشد، برای هر یک از $a_۱$ تا $a_۶$ دو انتخاب‌داریم. (به $b_۲$ بروند یا به $b_۳$ بروند.)

چون $b_۱$ و $b_۲$ در برد تابع نیست برای هر یک از $a_۱$ تا $a_۶$ فقط یک انتخاب داریم. (به $b_۳$ بروند.)

تعداد توابع پوشا = کل $- |b_۱' \cup b_۲' \cup b_۳'|$

$$= ۷۲۹ - ۶۴ - ۶۴ - ۶۴ + ۱ + ۱ + ۱ - ۰ = ۵۴۰$$

۱۴۹- گزینهٔ «۴» حالت‌هایی که مجموع دو عدد برابر ۸۲ می‌شود را مشخص می‌کنیم:

تعداد دسته‌هایی که مجموع دو عدد برابر ۸۲ می‌شود را با استفاده از تصاعد به دست می‌آوریم. دقت کنید که انگار می‌خواهیم تعداد عددهای دنبالهٔ ۱۱, ۱۴, …, ۳۸ را به دست آوریم. جملهٔ اول برابر ۱۱، جملهٔ آخر برابر ۳۸ و قدرنسبت تصاعد برابر ۳ است، بنابراین:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d \Rightarrow ۳۸ = ۱۱ + ۳(n-۱) \Rightarrow n - ۱ = ۹$$

$$\Rightarrow n = ۱۰$$

یعنی ۱۰ گروه داریم که مجموع عددهای آن‌ها برابر ۸۲ است، هم‌چنین سه عدد ۵ و ۸ و ۴۱ نیز وجود دارند که مجموع آن‌ها با هیچ عدد متمایز دیگری برابر ۸۲ نمی‌شود.

بدترین حالت این است که از هر کدام از این گروه‌ها یک عضو در زیرمجموعه داشته باشیم و سه عدد ۵ و ۸ و ۴۱ نیز در زیرمجموعهٔ c باشند. برای مثال به زیرمجموعهٔ مقابل نگاه کنید: $\{5,8,\underbrace{11,14,\ldots,38}_{\text{۱۰ عضو}},41\}$

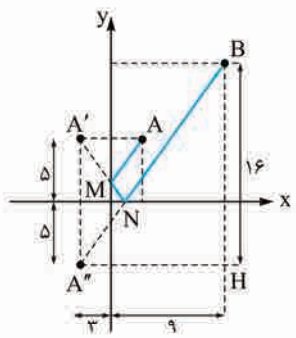
این یک مجموعهٔ ۱۳عضوی است اما مجموع هیچ دو عضو آن برابر با ۸۲ نیست اما به محض انتخاب عضو چهاردهم دست‌کم ۲ عضو وجود خواهند داشت که مجموع آن‌ها برابر ۸۲ می‌شود.

۱۵۰- گزینهٔ «۱» برای این‌که بازهٔ $(x+1,2x-1)$ یک همسایگی عدد ۳ باشد، باید عدد ۳ متعلق به بازه باشد:

$$\underbrace{x+1<3}_{(1)}\overset{(2)}{<}2x-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1): x+1<3 \Rightarrow x<2\\(2): 2x-1>3 \Rightarrow x>2\end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing$$

۱۵۱- گزینهٔ «۳» بازتاب نقطهٔ A نسبت به محور yها را A' و بازتاب A' را نسبت به محور xها را A'' می‌نامیم. طول کوتاه‌ترین مسیر شکستهٔ AMNB برابر با طول پاره‌خط $A''B$ است. با اندکی توجه به شکل نتیجه می‌شود:



$A''H=12$ و $BH=16$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH بنا بر رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$A''B^2=A''H^2+BH^2=12^2+16^2=400 \Rightarrow A''B=20$$

۱۵۲- گزینهٔ «۴» می‌دانیم $p\Rightarrow q$ با $\sim p\vee q$ هم‌ارزش است؛ بنابراین:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv p\wedge\sim q$$

با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نیز به راحتی می‌شود فهمید ارزش این دو عبارت یکسان است. *(چون تو کتاب گفته از هیر گزاره‌ها نرید و از جدول زیر برید!)*

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$p\wedge\sim q$	$\sim(p\Rightarrow q)$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن

۱۵۳- گزینهٔ «۱» می‌خواهیم گزاره‌های $\forall x\in\mathbb{N},\exists y\in\mathbb{N};P(x,y)$ ارزش درست داشته باشد. یعنی x هر عدد طبیعی که باشد می‌توان یک عدد طبیعی مثل y پیدا کرد که رابطه برقرار باشد. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم.

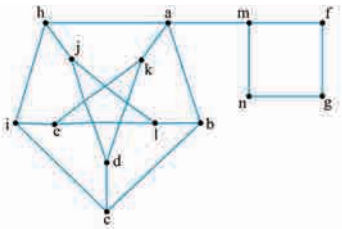
گزینهٔ (۱): $y-x=6$ رابطهٔ درست است. x را هر عدد طبیعی که فرض کنید، کافی است y را ۶تا بیشتر در نظر بگیرید *(که اون هم قطعاً یه عدد طبیعیه!)* و رابطه برقرار می‌شود.

گزینهٔ (۲): $x-y=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=1$ باشد، هیچ مقدار طبیعی برای y نمی‌توانیم پیدا کنیم.

گزینهٔ (۳): $x+y=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=6$ باشد، برای y هیچ مقدار طبیعی وجود ندارد.

گزینهٔ (۴): $xy=6$ نادرست است. برای مثال اگر $x=12$ باشد، y عددی طبیعی نمی‌شود.

۱۵۴- گزینهٔ «۲» همهٔ رأس‌ها را برای درک بهتر نام‌گذاری می‌کنیم.



گزینهٔ (۱): $\{a,c,e,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیست، چون برای مثال رأس j احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ (۲): $\{a,d,e,g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، چون همهٔ رأس‌ها را احاطه می‌کند، هم‌چنین اگر هر رأس را حذف کنیم، خود آن رأس دیگر احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ (۳): $\{a,b,d,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست، چون برای مثال رأس f احاطه نمی‌شود.

گزینهٔ (۴): $\{a,d,e,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست، چون برای مثال رأس h احاطه نمی‌شود.

۱۵۵- گزینهٔ «۴» می‌خواهیم مربع لاتین ما با مربع

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

متعامد باشد. با استفاده از جایگاه عدد ۱ در این مربع به سؤال پاسخ می‌دهیم. اگر بخواهیم دو مربع لاتین، متعامد باشند، باید در قسمت‌های رنگی مربع جدید، سه عدد متمایز ۱ و ۲ و ۳ قرار بگیرند.

برای مثال یکی از حالت‌ها را پیدا می‌کنیم:

	۱	
۲		
		۳

مربع را تکمیل می‌کنیم.

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

ترکیب دو مربع

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

همان‌طور که می‌بینید، دو مربع لاتین متعامدند. از طرفی می‌دانیم که اگر A با B متعامد باشد و B_1 یک جایگشت از B باشد A و B_1 نیز متعامدند. ۱ و ۲ و ۳ در مربع‌های رنگی !۳ جایگشت دارند، پس ۶ مربع لاتین متعامد با این مربع می‌توان ساخت.